# Projektive Geometrie der Kugelfläche in vektoranalytischer Behandlung

von

Dr. Franz Xaver Włodarski.

# Projektive Geometrie der Kugelfläche in vektoranalytischer Behandlung.

Inaugural-Dissertation

der

**mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät**

der

**Universität Freiburg in der Schweiz**

zur

**Erlangung der Doktorwürde**

vorgelegt von

**Franz Xaver Włodarski**

Lic. d. math. Wiss.

WARSCHAU.

DRUCK VON ALEXANDER GINS.

Nowozielna Str. 47.

—

1911.

Vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung des Herrn Professor Dr. M.—Fr. Daniëls an der Universität Freiburg in der Schweiz ausgeführt.

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. M.—Fr. Daniëls für seine liebenswürdige Anregung und Leitung dieser Arbeit meinen innigsten Dank auszusprechen.

# I. Einleitung.

Die projektive Geometrie ist in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts entstanden. Die Forscher, denen die projektive Geometrie ihren Aufbau vornehmlich verdankt, sind Poncelet, Möbius, Jacob Steiner, Chasles, v. Staudt.

Die Wissenschaft der projektiven Geometrie erstand, als J. V. Poncelet seinen „Traité des propriétés projectives des figures“ [1]) veröffentlichte.

Auf Grund der ersten Poncelet'schen Resultate und seiner Entdeckung der Reziprozität hat J. D. Gergonne die Dualität als allgemeines Grundgesetz formuliert. [2]) Er legt diesem Gesetz axiomatischen Charakter bei, er weist aber doch darauf hin, dass seine Richtigkeit aus Poncelet's Methode der reziproken Polaren folge.

Eine Punktverwandtschaft benutzten schon I. Newton [3]) und Ph. de la Hire [4]) zur Ableitung der Sätze über Kurven zweiter Ordnung. Dem Begriff der Verwandtschaft hat aber erst A. F. Möbius eine

[1]) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822; zweite Auflage, Paris 1865/66.

[2]) Gerg. Ann. 16 (1826), S. 209; 18 (1828), S. 149.

[3]) Vgl. dazu C. Jouel, Nyt. Tydskr. f. Math. 2 (1891), S. 3.

[4]) Sectiones conicae, 1685.

allgemeinere Bedeutung gegeben. Er definiert sie so, dass Punkten, die auf einer Geraden oder Ebene liegen, wieder Punkte entsprechen, die auf einer Geraden resp. Ebene liegen, und bezeichnet sie als Kollineation [1]). Möbius hat auch den Begriff des Doppelverhältnisses eingeführt [2]).

J. Steiner hat die Grundgebilde als Operationsmittel und auch die projektiven Erzeugungsmethoden eingeführt [3]). Er hat auch zuerst die projektive Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe eingeführt, und zwar durch Aufhebung der perspektiven Lage durch Verschiebung [4]). Diese Definition stützt sich auf den Pappus'schen Satz und nennt demgemäss zwei Grundgebilde erster Stufe projektiv bezogen, wenn die Elemente sich eineindeutig entsprechen und die Doppelverhältnisse entsprechender Elemente einander gleich sind [5]). Eine Folge dieser Definition ist, dass zwischen den Abscissen entsprechender Punkte zweier projektiven Punktreihen eine bilineare Relation besteht. Diese bilineare Relation bildet die analytische Grundlage der projektiven Beziehung. Auch M. Chasles hat zur Definition Streckenrelationen benutzt [6]), die der bilinearen Relation äquivalent sind [7]). M. Chasles hat später das Postulat aufgestellt, dass jede eineindeutige nicht transcendente

[1]) J. f. Math. 4 (1829), S. 101 (Ges. Werke 1, S. 447).

[2]) Barycentr. Calcul, § 180 ff.; vgl. auch J. f. Math. 4 (1829), S. 101; (Ges. Werke 1, S. 219 u. 447).

[3]) Vgl. Syst. Entw. Vorrede (S. 235 d. ges. Werke).

[4]) Syst. Entw. § 6.

[5]) Vgl. auch A. F. Möbius, Barycentr. Calcul, § 194.

[6]) Aperçu hist., S. 32; vgl. auch den Traité.

[7]) Das Doppelverhältnis als Invariante der bilinearen Beziehung erkannte zuerst A. Cayley, Paris C. R. 41 (1855), S. 1097 (Collect. Papers 2, S. 566).

Beziehung eine projektive sei [1]). M. Chasles hat auch den Begriff der Involution eingeführt [2]).

Eine Definition der projektiven Beziehung, die ganz unabhängig von dem Begriff des Masses ist, ist zuerst von K. G. C. von Staudt aufgestellt worden [3]). v. Staudt hat sich das Problem gestellt, die ganze projektive Geometrie aufzubauen, ohne sich auf metrische Begriffe von Strecken und Winkeln zu stützen, also auch unabhänging von dem Begriff des Doppelverhältnisses. Er sagt im Vorwort zu seiner „Geometrie der Lage“: „Ich habe in dieser Schrift versucht die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf.“ Alle auf Massverhältnissen beruhende Eigenschaften der geometrischen Gebilde, z. B. diejenigen Eigenschaften der Kurven und Flächen zweiter Ordnung, welche auf Mittelpunkte, Achsen, Brennpunkte u. s. w. sich beziehen, untersucht v. Staudt in einem Anhang.

Obwohl die projektive Geometrie als eine reine Geometrie entstanden ist, bietet doch die moderne Mathematik auch die Mittel zu einem analytischen Aufbau der projektiven Geometrie. Die analytische Methode, welche H. Grassmann [4]) bei Bearbeitung der projektiven Geometrie benutzt, weicht stark von den sonstigen analytischen Methoden ab und besitzt grosse Vorzüge.

Das Erscheinen des Werkes „Projektive Geometrie der Ebene“ von H. Grassmann (Leipzig und

[1]) Paris C. R. 41 (1855), S. 1097.
[2]) Aperçu hist. Note 10, S. 334.
[3]) v. Staudt, Geom. d. Lage, Nürnberg (1847), S. 49.
[4]) H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909).

Berlin, 1909) veranlasste meinen Lehrer Herrn Prof. Dr. M.—Fr. Daniëls mich zu der vorliegenden Arbeit anzuregen. Grundlagen der projektiven Geometrie der Kugelfläche hat Prof. Dr. M.—Fr. Daniëls in seinem Werk „Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives“ (Fribourg, 1907) gegeben.

Bei Vollendung meiner Arbeit diente mir hauptsächlich das zitierte Werk von H. Grassmann als Hilfsbuch.

Für weitere Litteraturangaben sei verwiesen auf den eingehenden Artikel von A. Schoenflies in Bd. III Heft 3 der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, dem auch ein Teil der vorgehenden Angaben entnommen ist.

## II. Das Doppelverhältnis.[1])

§ 1. Liegen vier Punkte $r_i$ (i=1, 2, 3, 4) in einer (sphärischen) Geraden, so nennt man den Doppelbruch

$$\frac{Vr_1r_3}{Vr_3r_2} : \frac{Vr_1r_4}{Vr_4r_2}$$

das Doppelverhältnis der Punkte $r_3$ und $r_4$ in Bezug auf die Punkte $r_1$ und $r_2$; man bezeichnet es mit $(r_1r_2r_3r_4)$.

Gehen vier (sphärische) Gerade $l_i$ (i=1, 2, 3, 4) durch einen Punkt hindurch, so nennt man den Doppelbruch

$$\frac{Vl_1l_3}{Vl_3l_2} : \frac{Vl_1l_4}{Vl_4l_2}$$

das Doppelverhältnis der Geraden $l_3$ und $l_4$ in Bezug auf die Geraden $l_1$ und $l_2$; man bezeichnet es mit $(l_1l_2l_3l_4)$.[2])

Das Doppelverhältnis ist eine unbenannte Zahl.

Wegen der vollkommenen Analogie, welche zwischen den Doppelverhältnissen der vier Punkte und der vier Geraden herrscht, werden wir nur die Eigenschaften des Doppelverhältnisses der vier Punkte studieren und dann die gefundenen Resultate direkt auf das Doppelverhältnis der vier Geraden dualistisch übertragen.

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 49.

[2]) Für die hier benutzte Darstellung von Kugelpunkten und Kugelgeraden durch Vektoren siehe M.— Fr. Daniëls, Essai de géom. sph. Fribourg (1907) S. 13.

§ 2. Es ist

$$(r_2r_1r_4r_3) = \frac{Vr_2r_4}{Vr_4r_1} : \frac{Vr_2r_3}{Vr_3r_1} = \frac{Vr_1r_3}{Vr_3r_2} : \frac{Vr_1r_4}{Vr_4r_2} = (r_1r_2r_3r_4),$$

also

(1). $$(r_2r_1r_4r_3) = (r_1r_2r_3r_4).$$

Ganz ähnlich können wir beweisen, dass

(2). $$(r_3r_4r_1r_2) = (r_1r_2r_3r_4)$$

ist. Wenden wir jetzt (2) auf die linke Seite von (1) an, so bekommen wir

$$(r_4r_3r_2r_1) = (r_2r_1r_4r_3) = (r_1r_2r_3r_4).$$

Eine weitere Wiederholung der beiden Umformungen (1) und (2) führt auf die alten Formen des Doppelverhältnisses zurück.

Wir haben also bekommen

$$(r_1r_2r_3r_4) = (r_2r_1r_4r_3) = (r_3r_4r_1r_2) = (r_4r_3r_2r_1),$$

worin der Satz liegt:

Satz 1: Das Doppelverhältnis der vier Elemente ändert seinen Wert nicht, wenn man die Elemente irgend zweier Elementenpaare gleichzeitig miteinander vertauscht.

§ 3. Das Doppelverhältnis der vier Elemente hängt nicht von den Grössen seiner Vektoren ab; denn seien etwa $a_i$ die Grössen der Vektoren $r_i$ und $r'_i$ seine Einheitsvektoren, so ist

$$(r_1r_2r_3r_4) = \frac{Vr_1r_3}{Vr_3r_2} : \frac{Vr_1r_4}{Vr_4r_2} = \frac{Va_1r'_1a_3r'_3}{Va_3r'_3a_2r'_2} : \frac{Va_1r'_1a_4r'_4}{Va_4r'_4a_2r'_2} =$$

$$= \frac{Vr'_1r'_3}{Vr'_3r'_2} : \frac{Vr'_1r'_4}{Vr'_4r'_2} = (r'_1r'_2r'_3r'_4).$$

Daraus folgt auch, dass das Doppelverhältnis seinen Wert nicht ändert, wenn man einige von den Punkten $r_i$ durch die diametral gegenüberliegenden ersetzt, denn dafür braucht man nur einige von $a_i$ durch $-a_i$ zu ersetzen. (Wenn es sich um das Doppelverhältnis der vier Geraden handelt, so darf man, ohne den Wert des Doppelverhältnisses zu ändern, den Umlaufssinn einiger der Geraden ändern).

§ 4. Den vier Elementen können wir $4! = 24$ verschiedene Reihenfolgen geben, es gibt also 24 Doppelverhältnisse von vier Elementen. Wir können aber diese 24 Doppelverhältnisse in sechs Gruppen spalten derart, dass die Doppelverhältnisse einer jeden Gruppe einander gleich sind (Satz 1).

Wir wollen jetzt die Beziehungen, die zwischen den einzelnen Gruppen bestehen, suchen. Diese Beziehungen ergeben sich aus den zwei nunmehr zu entwickelnden Sätzen, von denen der erste lautet:

Satz 2: Das Doppelverhältnis der vier Elemente geht in seinen reziproken Wert über, wenn man die beiden ersten oder die beiden letzten Elemente für sich vertauscht.

Wir wollen zuerst den zweiten Fall betrachten, also den Fall, wenn die beiden letzten Elemente miteinander vertauscht werden. Es ist

$$(r_1 r_2 r_4 r_3) = \frac{Vr_1 r_4}{Vr_4 r_2} : \frac{Vr_1 r_3}{Vr_3 r_2} = 1 : \left(\frac{Vr_1 r_3}{Vr_3 r_2} : \frac{Vr_1 r_4}{Vr_4 r_2}\right) = \frac{1}{(r_1 r_2 r_3 r_4)}.$$

Dieser Fall ist also schon bewiesen. Aus der letzten Gleichung folgt aber nach dem Satze 1

$$(r_2 r_1 r_3 r_4) = \frac{1}{(r_1 r_2 r_3 r_4)},$$

womit auch für den ersten Fall der Beweis geliefert ist.

Jetzt wollen wir die Beziehung zwischen den Doppelverhältnissen der zwei Systeme von vier Elementen suchen, welche auseinander durch die Vertauschung des zweiten und dritten oder des ersten und vierten Elementes hervorgehen.

Weil die Punkte $r_i$ der Voraussetzung nach in einer Geraden liegen, so können wir den Vektor $r_1$ in der Form

$$r_1 = m\, r_2 + n\, r_3$$

darstellen. Multiplizieren wir diese Gleichung vektoriell zuerst rechts mit $r_3$ und dann links mit $r_2$, so bekommen wir die Gleichungen

$$Vr_1r_3 = m\, Vr_2r_3 \text{ und } Vr_2r_1 = n\, Vr_2r_3,$$

woraus folgt

$$m = \frac{Vr_1r_3}{Vr_2r_3} \text{ und } n = \frac{Vr_2r_1}{Vr_2r_3},$$

also

$$r_1 = \frac{Vr_1r_3}{Vr_2r_3}\, r_2 + \frac{Vr_2r_1}{Vr_2r_3}\, r_3.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung vektoriell rechts mit $r_4$, so bekommen wir

$$Vr_1r_4 = \frac{Vr_1r_3}{Vr_2r_3}\, Vr_2r_4 + \frac{Vr_2r_1}{Vr_2r_3}\, Vr_3r_4,$$

woraus folgt

$$\frac{Vr_1r_3}{Vr_3r_2} : \frac{Vr_1r_4}{Vr_4r_2} + \frac{Vr_1r_2}{Vr_2r_3} : \frac{Vr_1r_4}{Vr_4r_3} = 1$$

oder

$$(r_1r_2r_3r_4) + (r_1r_3r_2r_4) = 1$$

oder (Satz 1)

$$(r_1r_2r_3r_4) + (r_4r_2r_3r_1) = 1.$$

Nennt man daher zwei Doppelverhältnisse, deren Zahlenwerte sich zur Einheit ergänzen, zueinander komplementär, so kann man die beiden letzten Gleichungen in dem Satze zusammenfassen:

Satz 3: Die Doppelverhältnisse zweier Systeme von vier Elementen, die auseinander durch die Vertauschung des zweiten und dritten oder des ersten und vierten Elementes hervorgehen, sind zueinander komplementär.

Jetzt können wir den Zusammenhang, der zwischen den sechs Gruppen von gleichen Doppelverhältnissen besteht, angeben. Wir können nämlich alle Doppelverhältnisse abhängig von $(r_1 r_2 r_3 r_4) = \delta$ ausdrücken. Wollen wir etwa $(r_1 r_3 r_4 r_2)$ in solcher Weise ausdrücken, so bekommen wir, weil

$$(r_1 r_3 r_2 r_4) = 1 - \delta$$

ist (Satz 3), (Satz 2)

$$(r_1 r_3 r_4 r_2) = \frac{1}{1 - \delta}.$$

§ 5. Wir wollen jetzt sehen, was für eine geometrische Bedeutung das Doppelverhältnis der vier Punkte resp. Geraden hat.

Wenn wir die Bogen, welche gleiche Richtungen besitzen, mit gleichen Zeichen, und diejenigen, die entgegengesetzte Richtungen besitzen, mit verschiedenen Zeichen annehmen, so können wir schreiben

$$\frac{Vr_1 r_3}{Vr_3 r_2} = \frac{a_1 a_3 \sin (r_1 r_3)}{a_2 a_3 \sin (r_3 r_2)} = \frac{a_1 \sin (r_1 r_3)}{a_2 \sin (r_3 r_2)},$$

ebenso

$$\frac{Vr_1 r_4}{Vr_4 r_2} = \frac{a_1 \sin (r_1 r_4)}{a_2 \sin (r_4 r_2)},$$

woraus sich durch Division ergibt

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{\sin(r_1 r_3)}{\sin(r_3 r_2)} : \frac{\sin(r_1 r_4)}{\sin(r_4 r_2)}.$$

Ganz ähnlich für die Geraden

$$(l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)} : \frac{\sin(l_1 l_4)}{\sin(l_4 l_2)}.$$

Damit ist die geometrische Bedeutung des Doppelverhältnisses gefunden.

§ 6. Wenn das Doppelverhältnis gleich — 1 ist, so nennt man es harmonisch und sagt dann, dass das dritte und vierte Element in Bezug auf das erste und zweite harmonisch koniugiert ist.

Da der reziproke Wert von — 1 wieder gleich — 1 ist, so können wir mit Rücksicht auf den Satz 2 sagen:

Satz 4: Vier harmonische Elemente bleiben harmonisch, wenn man die beiden ersten oder die beiden letzten Elemente miteinander vertauscht.

§ 7. Weil die Punkte $r_i$ (i = 1, 2, 3, 4) der Voraussetzung nach in einer Geraden liegen, so kann man immer zwei Zahlen g und h so wählen, dass

$$m_1 r_3 = r_1 + g\ r_2 \text{ und } m_2 r_4 = r_1 + h\ r_2$$

sein wird. Weil aber das Doppelverhältnis der vier Punkte von den Grössen seiner Vektoren unabhängig ist (§ 3), so ist

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{V r_1 (r_1 + g\ r_2)}{V (r_1 + g\ r_2) r_2} : \frac{V r_1 (r_1 + h\ r_2)}{V (r_1 + h\ r_2) r_2}$$

oder

$$(3). \qquad (r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{g}{h}.$$

Wir können aber die Längen der Vektoren, welche die Punkte oder Geraden bestimmen, ganz beliebig wählen, wir können sie also so wählen, dass

$$m_1 r_3 = r_1 \pm r_2$$

sein wird. Es sei dann

$$m_2 r_4 = r_1 \pm k\, r_2,$$

so haben wir nach (3)

$$(4). \qquad (r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{1}{k}.$$

Die oberen Betrachtungen gelten natürlich nur dann, wenn die Punkte $r_1$ und $r_2$ nicht zusammenfallen und nicht diametral gegenüberliegen.

§ 8. Fallen zufälligerweise die Punkte $r_1$ und $r_2$ zusammen (oder liegen sie diametral gegenüber), so ist

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{Vr_1 r_3}{Vr_3 r_1} : \frac{Vr_1 r_4}{Vr_4 r_1}.$$

Der Wert dieses Doppelverhältnisses ist gleich 1, wenn keiner der Punkte $r_3$ und $r_4$ mit $r_1$ zusammenfällt; andernfalls ist er unbestimmt.

Fallen die Punkte $r_1$ und $r_2$ nicht zusammen (und liegen sie nicht diametral gegenüber) und ist der Wert des Doppelverhältnisses gleich 1, so muss nach § 7 $g = h$ und zwar $\neq 0$ und $\neq \infty$ sein, d. h. es ist notwendig und genügend, dass die Punkte $r_3$ und $r_4$ miteinander nicht aber gleichzeitig mit $r_1$ oder $r_2$ zusammenfallen.

Satz 5: Das Doppelverhältnis der vier Elemente ist dann und nur dann gleich 1, wenn entweder das erste und zweite oder das dritte und vierte Element zusammenfallen (oder diametral gegenüberliegen), es

dürfen aber nicht drei oder alle vier Elemente miteinander zusammenfallen, denn dann ist das Doppelverhältnis unbestimmt.

§ 9. Angenommen, wir haben vier Punkte $r_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) in einer Geraden und durch diese vier Punkte gehen vier Gerade $l_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), die sich alle in einem Punkte $r_0$ schneiden. Es sei

$$m_1 r_3 = r_1 + g_1 r_2, \quad m_2 r_4 = r_1 + h_1 r_2,$$
$$n_1 l_3 = l_1 + g_2 l_2, \quad n_2 l_4 = l_1 + h_2 l_2,$$

dann ist nach § 7

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{g_1}{h_1} \text{ und } (l_1 l_2 l_3 l_4) = \frac{g_2}{h_2}.$$

Weil nun die Geraden $l_i$ durch die Punkte $r_i$ hindurchgehen, so ist

$$l_1 r_1 = 0, \; l_2 r_2 = 0, \; (l_1 + g_2 l_2)(r_1 + g_1 r_2) = 0,$$
$$(l_1 + h_2 l_2)(r_1 + h_1 r_2) = 0;$$

die beiden letzten Gleichungen können wir mit Rücksicht auf die beiden ersten auch so schreiben:

$$g_1 l_1 r_2 = - g_2 l_2 r_1 \text{ und } h_1 l_1 r_2 = - h_2 l_2 r_1,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}$$

oder

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = (l_1 l_2 l_3 l_4).$$

Satz 6: Satz von Pappus: Schneiden sich vier Gerade $l_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), die durch vier in einer Geraden liegende Punkte $r_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) hindurchgehen, in einem und demselben Punkte, so ist

$$(l_1 l_2 l_3 l_4) = (r_1 r_2 r_3 r_4).$$ [1])

---

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph. en coord. proj., Fribourg (1907), S. 39.

## III. Perspektive und projektive Grundgebilde erster Stufe.

§ 10. Die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden nennt man eine gerade Punktreihe oder eine Punktreihe erster Ordnung, jene Gerade den Träger der Punktreihe, die einzelnen Punkte der Punktreihe ihre Elemente.

Wir betrachten die diametral gegenüberliegenden Punkte der Punktreihe als nicht voneinander wesentlich verschieden.

Die Gesamtheit aller Geraden (Strahlen), die durch einen Punkt gehen, nennt man einen geraden Strahlenbüschel oder einen Strahlenbüschel erster Ordnung, jenen Punkt das Zentrum des Strahlenbüschels, die einzelnen Geraden (Strahlen) des Strahlenbüschels seine Elemente.

Wir betrachten die in den entgegengesetzten Richtungen durchlaufenen Geraden (Strahlen) des Strahlenbüschels als nicht voneinander wesentlich verschieden.

Die Punktreihen und Strahlenbüschel erster Ordnung sind die Grundgebilde erster Stufe der projektiven Geometrie der Kugelfläche.

Definition: Zwei Grundgebilde erster Stufe heissen perspektiv, wenn eine eindeutige Beziehung ihrer Elemente hergestellt wird entweder dadurch, dass jedes Element des einen Grundgebildes das entsprechende Element des anderen Grundgebildes enthält, oder dadurch, dass je zwei entsprechende Elemente der beiden Grundgebilde ein und dasselbe Element eines dritten Grundgebildes enthalten.

Es sind also eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel aufeinander perspektiv bezogen, wenn die Punktreihe der Schnitt des Trägers mit dem Strahlenbüschel ist; es sind zwei Punktreihen aufeinander perspektiv bezogen, wenn sie die Schnitte ein und desselben Strahlenbüschels sind (das Zentrum dieses Strahlenbüschels nennt man Perspektivitätszentrum der beiden Punktreihen); es sind zwei Strahlenbüschel aufeinander perspektiv bezogen, wenn die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen eine Punktreihe bilden, d. h. in einer Geraden liegen (diese Gerade nennt man die Perspektivitätsachse der beiden Strahlenbüschel).

Aus dem Satze von Pappus (Satz 6) und der Definition zweier perspektiven Grundgebilde erster Stufe folgt direkt der

Satz 7: In zwei perspektiven Grundgebilden erster Stufe bilden irgend vier Elemente des einen Grundgebildes das gleiche Doppelverhältnis wie die ihnen entsprechenden Elemente des anderen Grundgebildes.

Wir können aber nicht diesen Satz umkehren d. h. wir können nicht sagen, dass zwei Grundgebilde erster Stufe, bei welchen die Doppelverhältnisse der entsprechenden Elemente einander gleich sind, perspektiv sind. Durch die Umkehrung dieses Satzes kommen wir zum Begriff der sg. projektiven Grundgebilde erster Stufe.

Definition: Zwei Grundgebilde erster Stufe heissen projektiv aufeinander bezogen, wenn in einem von ihnen ein beliebiges Element mit den drei in ihm fest gegebenen Elementen dasselbe Doppelverhältnis besitzt, wie das entsprechende Element in dem anderen Grundgebilde mit den drei in ihm fest gegebenen Elementen.

§ 11. Es seien die drei fest gegebenen Elemente im ersten Grundgebilde $r_1, r_2, r_3$ und im zweiten $r'_1, r'_2, r'_3$. Es sei weiter

$$m\ r_3 = r_1 + g\ r_2 \text{ und } n\ r'_3 = r'_1 + h\ r'_2.$$

Nehmen wir nun in dem ersten Grundgebilde ein beliebiges Element

$$r_4 \equiv r_1 + g_1\ r_2.$$

Das ihm in dem zweiten Grundgebilde entsprechende Element sei

$$r'_4 \equiv r'_1 + x\ r'_2.$$

Nach der Definition zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe muss es nun sein

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = (r'_1 r'_2 r'_3 r'_4)$$

oder (§ 7)

$$\frac{g}{g_1} = \frac{h}{x},$$

woraus folgt

$$x = \frac{h g_1}{g},$$

folglich ist

$$r'_4 = r'_1 + \frac{h g_1}{g}\ r'_2.$$

Satz 8: Sind die drei fest gegebenen Elemente in jedem von zwei projektiven Grundgebilden erster Stufe bekannt, so können wir für ein beliebiges Element des einen Grundgebildes das entsprechende Element des anderen finden.

§ 12. Jetzt kommt die Frage, welche Rolle die drei in jedem der beiden projektiven Grundgebilde erster Stufe fest gegebenen Elemente spielen.

Es ist (§ 7)

$$(r_1 r_2 r_3 r_1) = \infty,\ (r_1 r_2 r_3 r_2) = 0$$

und (Satz 5)

$$(r_1 r_2 r_3 r_3) = 1.$$

Weil nun ebenso

$(r'_1 r'_2 r'_3 r'_1) = \infty$, $(r'_1 r'_2 r'_3 r'_2) = 0$, $(r'_1 r'_2 r'_3 r'_3) = 1$

ist, so sind $r_i$ und $r'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ drei Paare entsprechender Elemente.

Satz 9: Die sechs in den beiden projektiven Grundgebilden erster Stufe fest gegebenen Elemente bilden drei Paare entsprechender Elemente.

Bilden diese fest gegebenen Elemente drei Paare gewöhnlicher zugeordneter Elemente oder spielen sie vielleicht noch eine besondere Rolle? Bevor wir diese Frage beantworten, beweisen wir den

Satz 10: In zwei projektiven Grundgebilden erster Stufe bilden je vier Elemente des einen Grundgebildes das gleiche Doppelverhältnis, wie die vier entsprechenden Elemente des anderen Grundgebildes[1]).

Nehmen wir im ersten Grundgebilde vier beliebige Elemente

$$r_1 + g_i r_2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so sind die vier entsprechenden Elemente des anderen Grundgebildes (§ 11)

$$r'_1 + \frac{h g_i}{g} r'_2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Es ist nun

$$\frac{V(r_1 + g_1 r_2)\ (r_1 + g_3 r_2)}{V(r_1 + g_3 r_2)\ (r_1 + g_2 r_2)} : \frac{V(r_1 + g_1 r_2)\ (r_1 + g_4 r_2)}{V(r_1 + g_4 r_2)\ (r_1 + g_2 r_2)} = \frac{g_3 - g_1}{g_2 - g_3} : \frac{g_4 - g_1}{g_2 - g_4},$$

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 61.

und wenn wir $g_i$ durch $\frac{hg_i}{g}$ ersetzen, so ändert sich die rechte Seite nicht, womit die Richtigkeit des Satzes 10 bestätigt ist.

Aus dem Satze 10 und der Definition der projektiven Grundgebilde erster Stufe folgt nun

Satz 11: Als fest gegebene Elemente in zwei projektiven Grundgebilden erster Stufe können wir drei beliebige Paare entsprechender Elemente betrachten.

Aus den Sätzen 11 und 8 folgt

Satz 12: Drei Paare entsprechender Elemente zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe bestimmen die projektive Beziehung dieser Grundgebilde [1]).

Aus dem Satze 12 ergibt sich

Satz 13: Zwei projektive Grundgebilde erster Stufe, deren drei Paare entsprechender Elemente zusammenfallen, fallen identisch zusammen [2]).

§ 13. Es seien drei Paare $r_i$, $r'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ entsprechender Elemente zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe gegeben. Weil die Längen der Vektoren, welche die Punkte oder die Geraden der Kugelfläche bestimmen, beliebig gross sind, so können wir die Längen der Vektoren $r_i$ und $r'_i$ so wählen, dass

$$r_3 = r_1 + r_2 \text{ und } r'_3 = r'_1 + r'_2$$

sein wird. Nehmen wir nun in dem ersten Grundgebilde ein beliebiges Element, etwa

$$r_4 = r_1 + k\, r_2.$$

[1]) Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 62.

[2]) Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 58,

Es ist dann (§ 7)

$$(r_1 r_2 r_3 r_4) = \frac{1}{k}.$$

Wenn wir nun das dem Elemente $r_4$ entsprechende Element

$$r'_4 = r'_1 + x\ r'_2$$

nennen, so ist

$$(r'_1 r'_2 r'_3 r'_4) = \frac{1}{x} = \frac{1}{k},$$

woraus folgt

$$x = k.$$

In dem Parameter k haben wir also ein Mittel für die analytische Zuordnung der beiden projektiven Grundgebilde.

Satz 14: Sind drei Paare $r_i$, $r'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ entsprechender Elemente zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe gegeben und wählt man die Längen der Vektoren so, dass

$$r_3 = r_1 + r_2 \text{ und } r'_3 = r'_1 + r'_2$$

ist, so sind, wenn wir die beiden projektiven Grundgebilde in der Form

$$r_1 + k\ r_2 \text{ und } r'_1 + k\ r'_2$$

darstellen, zwei Elemente, die den gleichen Parameter k besitzen, die entsprechenden Elemente.

Wir nennen in diesem Falle die Elemente $r_1$ und $r_2$, $r'_1$ und $r'_2$ die Grundelemente, $r_3$ und $r'_3$ die Einheitselemente der beiden projektiven Grundgebilde („Einheitselemente", weil sie dem Werte 1 des Parameters k entsprechen). [1])

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 55 u. 60.

§ 14. Ändert sich k von $-\infty$ bis o, so bewegt sich der Punkt $r_1 + k\, r_2$ von $-r_2$ bis $r_1$ und der Punkt $r'_1 + k\, r'_2$ von $-r'_2$ bis $r'_1$; ändert sich k von o bis $+\infty$, so bewegt sich der Punkt $r_1 + k\, r_2$ von $r_1$ bis $r_2$ und der Punkt $r'_1 + k\, r'_2$ von $r'_1$ bis $r'_2$.

Satz 15: Durchläuft ein Element ein Grundgebilde erster Stufe in einem bestimmten unveränderlichen Sinne, sodass es nacheinander mit jedem Elemente des Gebildes zusammenfällt, so durchläuft das homologe Element ein projektiv zugeordnetes Grundgebilde erster Stufe in einem bestimmten Sinne, sodass es ebenfalls nacheinander mit jedem Elemente dieses Gebildes zusammenfällt [1]).

§ 15. Aus der Definition der projektiven Grundgebilde erster Stufe und den Sätzen 11 und 7 folgt, dass zwei perspektive Grundgebilde erster Stufe projektiv sind. Perspektivität bildet ein Spezialfall von der Projektivität, und wir werden bald sehen, unter welchen Umständen eine Projektivität Perspektivität ist.

Angenommen, wir haben zwei ungleichnamige projektive Grundgebilde erster Stufe

$$r_1 + k\, r_2 \text{ und } l_1 + k\, l_2.$$

Gibt es nun unter den Strahlen des Strahlenbüschels solche, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte der Punktreihe hindurchgehen?

Die Parameter k dieser Strahlen müssen der Gleichung

$$(r_1 + k\, r_2)\,(l_1 + k\, l_2) = o$$

oder

$$r_1 l_1 + k\,(r_1 l_2 + r_2 l_1) + k^2 r_2 l_2 = o$$

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage. Leipzig (1900), S. 27.

genügen. Diese Gleichung ist in Bezug auf k vom zweiten Grade, folglich liefert sie zwei Werte für k, also gibt es zwei solche Strahlen, die durch die ihnen entsprechenden Punkte hindurchgehen; diese Elemente können auch imaginär sein, nämlich dann, wenn die Werte von k, welche wir aus der letzten Gleichung finden, imaginär (koniugiert komplex) sind.

Das ist im allgemeinen, d. h. wenn nicht alle Koeffizienten in der letzten Gleichung null sind. Wenn aber alle Koeffizienten in der letzten Gleichung null sind, so wird unsere Gleichung für alle Werte von k erfüllt, also gehen alle Strahlen durch die ihnen zugeordneten Punkte, d. h. die Grundgebilde sind perspektiv. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$r_1 l_1 = 0,\ r_2 l_2 = 0 \text{ und } r_1 l_2 + r_2 l_1 = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen können wir mit Rücksicht auf die beiden ersten auch so schreiben

$$(r_1 + r_2)(l_1 + l_2) = 0 \text{ oder } r_3 l_3 = 0.$$

Die drei letzten Gleichungen sagen aus, dass die Strahlen $l_i$ $(i = 1, 2, 3)$ durch die ihnen zugeordneten Punkte hindurchgehen.

Satz 16: Bei zwei projektiven ungleichnamigen Grundgebilden erster Stufe gibt es immer zwei Strahlen (die auch imaginär sein können), die durch die ihnen zugeordneten Punkte hindurchgehen; gibt es drei solche reellen Strahlen, so sind dann und nur dann die Grundgebilde perspektiv [1]).

[1]) Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 59.

§ 16. Die Parameter k solcher zugeordneten Punkte der projektiven Punktreihen erster Ordnung

$$\mathfrak{r}_1 + k\,\mathfrak{r}_2 \text{ und } \mathfrak{r}'_1 + k\,\mathfrak{r}'_2,$$

welche mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{r}_0$ in einer Geraden liegen, müssen der Gleichung

$$[\mathfrak{r}_0\ \mathfrak{r}_1 + k\mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}'_1 + k\mathfrak{r}'_2] = 0\ ^1)$$

oder

$$[\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_1] + k\ ([\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2] + [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_1]) + k^2\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2] = 0$$

genügen. Diese Gleichung liefert zwei Werte für k (die auch koniugiert komplex sein können), folglich gibt es zwei Paare solcher Punkte (die auch imaginär sein können). Wenn aber zufälligerweise alle Koeffizienten in der letzten Gleichung verschwinden, so genügt dieser Gleichung jeder Wert von k. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$[\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_1] = 0,\ [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2] = 0 \text{ und } [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3] = 0,$$

d. h. es müssen drei solche reellen Paare bestehen.

Satz 17: Im Falle zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung gehen durch jeden Punkt $\mathfrak{r}_0$ die Verbindungsgeraden zweier Paare entsprechender Punkte (die auch imaginär sein können) hindurch; gehen durch einen Punkt $\mathfrak{r}_0$ die Verbindungsgeraden dreier Paare ent-

Satz 17′: Im Falle zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung liegen in jeder Geraden $\mathfrak{l}_0$ die Schnittpunkte zweier Paare entsprechender Strahlen (die auch imaginär sein können); liegen in einer Geraden $\mathfrak{l}_0$ die Schnittpunkte dreier Paare entsprechender (reeller)

[1]) Wir bezeichnen gewöhnlich $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} \equiv [\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}]$.

sprechender (reeller) Punkte hindurch, so besitzen sie alle dieselbe Eigenschaft.

Strahlen, so besitzen sie alle dieselbe Eigenschaft. [1])

Daraus ergibt sich direkt

Satz 18: Gehen die Verbindungsgeraden dreier Paare entsprechender (reeller) Punkte zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern durch einen Punkt hindurch, so sind dann (und nur dann) beide Punktreihen perspektiv.

Satz 18′: Liegen die Schnittpunkte dreier Paare entsprechender (reeller) Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung mit getrennt liegenden Zentren in einer Geraden, so sind dann (und nur dann) beide Strahlenbüschel perspektiv. [2])

§ 17. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei projektive Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2$$

perspektiv seien, ist (Satz 18)

(1). $$[\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3] = 0.$$ [3])

oder $$\begin{vmatrix} [r_1 r'_1 r'_2] & [r_2 r'_1 r'_2] \\ [r'_1 r_1 r_2] & [r'_2 r_1 r_2] \end{vmatrix} = 0.$$

Es gibt dann eine Zahl $k_1$, für welche die Bedingungen

(2). $$\begin{cases} [r_1 + k_1 r_2 \; r'_1 r'_2] = 0 \\ [r'_1 + k_1 r'_2 \; r_1 \; r_2] = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind.

[1]). Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 78.

[2]) Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 61.

[3]) Wir bezeichnen abkürzend $Vr_i r_i' \equiv \mathfrak{x}_i$.

Die erste der Gleichungen (2) zeigt, dass der Punkt $r_1 + k_1 r_2$ der ersten Punktreihe in dem Träger $Vr'_1 r'_2$ der zweiten Punktreihe liegt, d. h. $r_1 + k_1 r_2$ ist der Schnittpunkt der beiden Träger; die zweite der Gleichungen (2) zeigt, dass der entsprechende Punkt $r'_1 + k_1 r'_2$ der zweiten Punktreihe in dem Träger $Vr_1 r_2$ der ersten Punktreihe liegt, d. h. $r'_1 + k_1 r'_2$ ist der Schnittpunkt der beiden Träger. Wir haben also bekommen, dass im Falle zweier perspektiven Punktreihen der Schnittpunkt der beiden Träger sich selbst entspricht. Weil wir aber auch umgekehrt von den Gleichungen (2) zu (1) kommen können, so ist auch das Umgekehrte wahr.

Satz 19: Entspricht das gemeinsame Element zweier projektiven gleichnamigen Grundgebilde erster Stufe mit getrennt liegenden Trägern resp. Zentren sich selbst, so sind dann und nur dann beide Grundgebilde perspektiv. [1])

§ 18. Aus der Definition der projektiven Grundgebilde erster Stufe ergibt sich

Satz 20: Sind zwei Grundgebilde erster Stufe einem dritten projektiv, so sind sie untereinander projektiv. [2])

Wir betrachten hier als entsprechende Elemente dieser beiden Grundgebilde erster Stufe diejenigen Elemente, welche ein und demselben Elemente des dritten Grundgebildes zugeordnet sind.

Aus der Definition der perspektiven Grundgebilde rster Stufe folgt direkt

[1]). Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 59.

[2]) Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 54

Satz 21: Zwei gleichnamige Grundgebilde erster Stufe, die einem dritten ungleichnamigen perspektiv sind, sind untereinander perspektiv.

Zwei gleichnamige Grundgebilde erster Stufe, die einem dritten gleichnamigen perspektiv sind, sind im allgemeinen untereinander nicht perspektiv. Nur in einigen Fällen sind sie perspektiv; man kann z. B. sehr leicht beweisen, dass, wenn der Schnittpunkt der Träger zweier Punktreihen, die einer und derselben dritten Punktreihe perspektiv sind, dem Träger dieser dritten Punktreihe angehört, diese Punktreihen perspektiv sind (diese Bedingung ist genügend aber nicht notwendig).

§ 19. Angenommen, wir haben zwei projektive Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2.$$

Verbinden wir zwei beliebige entsprechende Punkte $r_m$ und $r'_m$ miteinander und nehmen wir in der Verbindungsgeraden zwei beliebige nicht zusammenfallende Punkte $r_0$ und $r'_0$. Da die Strahlenbüschel

$$Vr_0(r_1 + kr_2) \text{ und } Vr'_0(r'_1 + kr'_2)$$

unseren beiden projektiven Punktreihen projektiv (perspektiv) sind, so sind sie untereinander projektiv (Satz 20). Als entsprechende Strahlen betrachten wir diejenigen, welche durch die entsprechenden Punkte der beiden Punktreihen hindurchgehen. Die Strahlen $Vr_0r_m$ und $Vr'_0r'_m$ sind also entsprechend, sie fallen aber zusammen, folglich sind beide Strahlenbüschel perspektiv (Satz 19).

Zwei solche perspektiven Strahlenbüschel können wir zur Vervollständigung der projektiven Punktreihen erster Ordnung benutzen. Wollen wir näm-

lich zwei projektive Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern vervollständigen, wenn drei Paare entsprechender Elemente gegeben sind, so brauchen wir dafür nur die perspektiven Strahlenbüschel $Vr_0(r_1 + kr_2)$ und $Vr'_0(r'_1 + kr'_2)$ zu bilden, ihre Perspektivitätsachse zu suchen. Mit Hilfe dieser können wir dann unsere Punktreihen vervollständigen.

Um zwei projektive Strahlenbüschel erster Ordnung mit getrennt liegenden Zentren zu vervollständigen, brauchen wir zwei perspektive Punktreihen.

Der Fall der ungleichnamigen Grundgebilde erster Stufe lässt sich auf den Fall der gleichnamigen Grundgebilde zurückführen, indem wir ein Grundgebilde, das einem der gegebenen Grundgebilde perspektiv und mit ihm ungleichnamig ist, zu Hilfe nehmen. [1])

§ 20. Es seien

$$r_1 + k_i r_2 \text{ und } r'_1 + k_i r'_2 \qquad (i = 1, 2)$$

zwei beliebige Paare entsprechender Punkte der projektiven Punktreihen erster Ordnung

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2.$$

Die Verbindungsgeraden der Punkte

$$r_1 + k_i r_2 \text{ und } r'_1 + k_j r'_2 \qquad \begin{pmatrix} i = 1 & j = 2 \\ i = 2 & j = 1 \end{pmatrix}$$

sind

$$V(r_1 + k_i r_2)(r'_1 + k_j r'_2) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 & j = 2 \\ i = 2 & j = 1 \end{pmatrix}.$$

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 66.

Durch den Schnittpunkt dieser beiden Verbindungsgeraden geht die Gerade

$$V(r_1 + k_1 r_2)(r'_1 + k_2 r'_2) + V(r'_1 + k_1 r'_2)(r_1 + k_2 r_2)$$

oder, unabhängig von einem von null verschiedenen Zahlenfaktor,

$$Vr_1 r'_2 + Vr'_1 r_2.$$

Diese Gerade ist von $k_1$ und $k_2$ unabhängig; wir nennen sie die Projektivitätsachse.

Satz 22: Sind $r_i$ und $r'_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ die entsprechenden Punkte zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung, so liegen die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $Vr_m r'_n$ und $Vr_n r'_m$ in ein und derselben Geraden, nämlich in der sg. Projektivitätsachse der beiden projektiven Punktreihen; wenn die Längen der Vektoren so gewählt sind, dass $r_1 + r_2$ und $r'_1 + r'_2$ zwei entsprechende Punkte sind, so ist der Vektor der Projektivitätsachse

$$Vr_1 r'_2 + Vr'_1 r_2.$$

Satz 22′: Sind $l_i$ und $l'_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ die entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung, so gehen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $Vl_m l'_n$ und $Vl_n l'_m$ durch ein und denselben Punkt, nämlich durch das sg. Projektivitätszentrum der beiden projektiven Strahlenbüschel; wenn die Längen der Vektoren so gewählt sind, dass $l_1 + l_2$ und $l'_1 + l'_2$ zwei entsprechende Strahlen sind, so ist der Vektor des Projektivitätszentrums

$$Vl_1 l'_2 + Vl'_1 l_2.$$ [1])

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 82.

Von den gefundenen Eigenschaften der Projektivitätsachse und des Projektivitätszentrums können wir bei Vervollständigung projektiver Grundgebilde erster Stufe Gebrauch machen.

§ 21. Der Schnittpunkt der beiden Träger zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2$$

ist

$$Vvr_1r_2vr'_1r'_2,$$

also aufgefasst als ein Punkt der ersten Punktreihe ist er

$$\frac{r_1}{[r'_1r'_2r_1]} - \frac{r_2}{[r'_1r'_2r_2]}$$

und aufgefasst als ein Punkt der zweiten Punktreihe ist er

$$\frac{r'_1}{[r_1r_2r'_1]} - \frac{r'_2}{[r_1r_2r'_2]}.$$

Die Schnittpunkte der Projektivitätsachse mit den beiden Trägern sind

$$\frac{r_1}{[r_1r_2r'_1]} - \frac{r_2}{[r_1r_2r'_2]} \text{ und } \frac{r'_1}{[r'_1r'_2r_1]} - \frac{r'_2}{[r'_1r'_2r_2]}.$$

Satz 23: Die Projektivitätsachse schneidet die Träger der beiden projektiven Punktreihen erster Ordnung in Punkten, welche dem Schnittpunkte der beiden Träger entsprechen.

Satz 23′: Die Verbindungsgeraden des Projektivitätszentrums mit den Zentren der beiden projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung sind die Strahlen, welche der Verbindungsgeraden der beiden Zentren entsprechen.

§ 22. Die k's solcher entsprechenden Punkte zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2,$$

welche um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind, müssen der Gleichung

$$(r_1 + kr_2)\ (r'_1 + kr'_2) = 0$$

oder

$$r_1 r'_1 + k\ (r_1 r'_2 + r_2 r'_1) + k^2 r_2 r'_2 = 0$$

genügen. Diese Gleichung liefert zwei Werte für k. Wenn aber

$$r_1 r'_1 = 0,\ r_2 r'_2 = 0 \text{ und } (r_1 + r_2)\ (r'_1 + r'_2) = 0$$

ist, so ist unsere Gleichung für jeden Wert von k erfüllt.

Satz 24: Es gibt in zwei projektiven Punktreihen erster Ordnung zwei Paare entsprechender Punkte (die auch imaginär sein können), welche um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind; gibt es drei solche reellen Paare, so sind alle Punkte um $\frac{\pi}{2}$ von ihren entsprechenden Punkten entfernt.

Satz 24′: Es gibt in zwei projektiven Strahlenbüscheln erster Ordnung zwei Paare entsprechender Strahlen (die auch imaginär sein können), welche zueinander senkrecht stehen; gibt es drei solche reellen Paare, so stehen alle Strahlen zu ihren entsprechenden Strahlen senkrecht.

§ 23. Angenommen, wir haben zwei projektive Punktreihen erster Ordnung

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2.$$

Für jeden Wert von k sind die Punkte

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r_1 - \frac{r_1^2 + kr_1 r_2}{r_1 r_2 + kr_2^2}\ r_2$$

der ersten Punktreihe um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt.

Ihre entsprechenden Punkte der zweiten Punktreihe sind

$$r'_1 + kr'_2 \text{ und } r'_1 - \frac{r_1^2 + kr_1r_2}{r_1r_2 + kr_2^2} r'_2.$$

Sollen sie auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sein, so muss

$$(r'_1 + kr'_2)\left(r'_1 - \frac{r_1^2 + kr_1r_2}{r_1r_2 + kr_2^2} r'_2\right) = 0$$

sein. Diese Gleichung liefert zwei Werte für k. Sei $\lambda$ eine Wurzel, dann ist die andere Wurzel

$$- \frac{r_1^2 + \lambda r_1r_2}{r_1r_2 + \lambda r_2^2}.$$

Diese Wurzeln können nicht einander gleich sein, denn sonst wäre

$$(r_1 + \lambda r_2)^2 = 0,$$

was aber unmöglich ist.

Diese Wurzeln können auch nicht koniugiert komplex sein, denn sei etwa

$$\lambda = a + bi,$$

dann müsste

$$- \frac{r_1^2 + (a + bi) r_1r_2}{r_1r_2 + (a + bi) r_2^2} = a - bi$$

oder

$$(r_1 + ar_2)^2 + b^2r_2^2 = 0$$

sein, was aber auch unmöglich ist.

Beide Wurzeln sind also reell und voneinander verschieden. Jeder Wurzel entspricht aber ein und dasselbe reelle Paar der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte der ersten Punktreihe, deren zugeordnete Punkte der zweiten Punktreihe auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind.

Sind aber alle Koeffizienten in der quadratischen Gleichung in k null, d. h. ist

$$r_1^2.r'_1r'_2 - r'^2_1.r_1r_2 = 0,\ r_2^2.r'_1r'_2 - r'^2_2.r_1r_2 = 0$$
$$\text{und } r_1^2r'^2_2 - r'^2_1r_2^2 = 0,$$

so genügt dieser Gleichung jeder Wert von k, folglich entsprechen jedem Paare der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte auch zwei um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernte Punkte.

Die dritte der drei letzten Gleichungen hängt von den beiden ersten ab, denn schreiben wir die beiden ersten in der Form

$$r_1^2.r'_1r'_2 = r'^2_1.r_1r_2 \text{ und } r_2^2.r'_1r'_2 = r'^2_2.r_1r_2$$

und dividieren wir jetzt die erste durch die zweite, so bekommen wir die dritte Gleichung.

Es sind also nur die beiden ersten Gleichungen voneinander unabhängig. Sie sagen aus, dass die Punkte

$$r'_1 \text{ und } r_1r_2.r'_1 - r_1^2.r'_2,\ r'_2 \text{ und } r_2^2.r'_1 - r_1r_2.r'_2$$

der zweiten Punktreihe um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind. Diesen Punkten entsprechen aber in der ersten Punktreihe die Punkte

$$r_1 \text{ und } r_1r_2.r_1 - r_1^2.r_2,\ \ r_2 \text{ und } r_2^2.r_1 - r_1r_2.r_2,$$

welche auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind.

Satz 25: Im Falle zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung gibt es immer in einer Punktreihe ein reelles Paar der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten

Satz 25′: Im Falle zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung gibt es immer in einem Strahlenbüschel ein reelles Paar der zueinander senkrechten

Punkte, deren zugeordnete Punkte der anderen Punktreiche auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind; gibt es zwei solche Paare, so entsprechen jedem Paare der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte einer Punktreihe auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernte Punkte der anderen Punktreihe.

Strahlen, deren zugeordnete Strahlen des anderen Strahlenbüschels auch zueinander senkrecht stehen; gibt es zwei solche Paare, so entsprechen jedem Paare der zueinander senkrechten Strahlen eines Strahlenbüschels auch zueinander senkrecht stehende Strahlen des anderen Strahlenbüschels.

Satz 26: Im Falle zweier projektiven ungleichnamigen Grundgebilde erster Stufe gibt es immer ein reelles Paar der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte der Punktreihe, deren entsprechende Strahlen zueinander senkrecht stehen: gibt es zwei solche Paare, so entsprechen jedem Paare der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte zueinander senkrechte Strahlen [1]).

§ 24. Nennen wir dieses Paar der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte der ersten Punktreihe, deren entsprechende Punkte auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind, $r_{g_1}$ und $r_{g_2}$ und das Paar ihrer entsprechenden Punkte $r'_{g_1}$ und $r'_{g_2}$. Seien noch $r_i$ und $r_k$ zwei beliebige Punkte der ersten Punktreihe, $r'_i$ und $r'_k$ ihre entsprechenden Punkte der zweiten Punktreihe.

Es ist (Satz 10)

$$\frac{Vr_{g_1}r_i}{Vr_ir_{g_2}} : \frac{Vr_{g_1}r_k}{Vr_kr_{g_2}} = \frac{Vr'_{g_1}r'_i}{Vr'_ir'_{g_2}} : \frac{Vr'_{g_1}r'_k}{Vr'_kr'_{g_2}},$$

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 79.

also

$$\frac{Vr_{g_1}r_i}{Vr_i r_{g_2}} : \frac{Vr'_{g_1}r'_i}{Vr'_i r'_{g_2}} = \frac{Vr_{g_1}r_k}{Vr_k r_{g_2}} : \frac{Vr'_{g_1}r'_k}{Vr'_k r'_{g_2}}.$$

Wenn wir also mit r und r' zwei beliebige zugeordnete Punkte bezeichnen, so haben wir

$$\frac{Vr_{g_1}r}{Vrr_{g_2}} : \frac{Vr'_{g_1}r'}{Vr'r'_{g_2}} = \text{const.}$$

oder

$$\frac{\sin(r_{g_1}r).\ \sin(r'_{g_2}r')}{\sin(r_{g_2}r).\ \sin(r'_{g_1}r')} = c$$

oder

$$\operatorname{tg}(r_{g_1}r).\ \operatorname{tg}(r'_{g_2}r') = \operatorname{ctg}(r_{g_2}r).\ \operatorname{ctg}(r'_{g_1}r') = c.$$

Satz 27: Im Falle zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe ist

$$\operatorname{tg}(r_{g_1}r).\ \operatorname{tg}(r'_{g_2}r') = \operatorname{ctg}(r_{g_2}r).\ \operatorname{ctg}(r'_{g_1}r') = c$$

resp.

$$\operatorname{tg}(l_{g_1}l).\ \operatorname{tg}(l'_{g_2}l') = \operatorname{ctg}(l_{g_2}l).\ \operatorname{ctg}(l'_{g_1}l') = c$$

resp.

$$\operatorname{tg}(r_{g_1}r).\ \operatorname{tg}(l_{g_2}l) = \operatorname{ctg}(r_{g_2}r).\ \operatorname{ctg}(l_{g_1}l) = c.$$ [1]).

§ 25. Im Folgenden werden wir die Bezeichnungen

$$\Psi l \equiv r_1.r'_2 l + r'_2.r_1 l - r_2.r'_1 l - r'_1.r_2 l \text{ und } \Phi r \equiv l_1.l'_2 r + l'_2.l_1 r - l_2.l'_1 r - l'_1.l_2 r$$

benutzen. Es stellt also $\Psi$ resp. $\Phi$ die Funktionaloperation oder das Dyadic

$$\Psi \equiv r_1.r'_2 + r'_2.r_1 - r_2.r'_1 - r'_1.r_2 \text{ resp. } \Phi \equiv l_1.l'_2 + l'_2.l_1 - l_2.l'_1 - l'_1.l_2$$

dar. Die wichtigste Eigenschaft dieser Operationen ist, dass

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph.. Fribourg (1907), S. 81.

$$\mathfrak{l}\,\Psi\,\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'\,\Psi\,\mathfrak{l} \text{ und } \mathfrak{r}\,\Phi\,\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}'\,\Phi\,\mathfrak{r}$$

ist. [1])

Im Falle zweier perspektiven Punktreihen erster Ordnung gilt die Gleichung (Satz 18)

$$[\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_3] = 0$$

oder

$$[\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2] = [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2]\,[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2].$$

Der Schnittpunkt der beiden Träger

$$\frac{\mathfrak{r}'_1}{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{r}'_2}{[\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]}$$

gibt mit dem Perspektivitätszentrum

$$\frac{\mathfrak{r}_2}{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]} + \frac{\mathfrak{r}'_2}{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2]}$$

verbunden eine Gerade $\mathfrak{l}_0$, und wenn wir auf diese die durch $\Psi$ bezeichnete Operation anwenden, so finden wir nach einigen einfachen Reduktionen (unter Berücksichtigung der oben stehenden für zwei perspektive Punktreihen geltenden Gleichung)

$$\Psi\,\mathfrak{l}_0 = 0.$$

Jetzt wollen wir die Sache umkehren.

Angenommen, es gibt im Falle zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern eine Gerade $\mathfrak{l}_0$ (== o), für welche

$$\Psi\,\mathfrak{l}_0 = 0$$

ist (im Falle, wenn die beiden Träger zusammenfallen, gibt es immer eine solche Gerade, nämlich den

[1]) Vgl. P. G. Tait, M. A., Elem. Handb. d. Quatern., Leipzig (1880), S. 146, Bez. von Hamilton.

gemeinsamen Träger; diesen Fall betrachten wir aber nicht).

Dann ist auch $l_0 \,\psi\, l_0 = o$, woraus folgt

$$\frac{l_0 r_1}{l_0 r_2} = \frac{l_0 r'_1}{l_0 r'_2}. \tag{3}$$

Aus $\psi l_0 = o$ folgt aber

$$l_0 r'_2 . r_1 - l_0 r'_1 . r_2 = l_0 r_2 . r'_1 - l_0 r_1 . r'_2,$$

also auch

$$V\left(r_1 - \frac{l_0 r'_1}{l_0 r'_2} r_2\right)\left(r'_1 - \frac{l_0 r_1}{l_0 r_2} r'_2\right) = o$$

oder nach (3)

$$V\left(r_1 - \frac{l_0 r_1}{l_0 r_2} r_2\right)\left(r'_1 - \frac{l_0 r_1}{l_0 r_2} r'_2\right) = o,$$

folglich sind beide Punktreihen perspektiv (Satz 19).

Satz 28: Zwei projektive Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern sind dann und nur dann perspektiv, wenn es eine Gerade $l_0$ derart gibt, dass

$$\psi l_0 = o$$

ist.

Satz 28′: Zwei projektive Strahlenbüschel erster Ordnung mit getrennt liegenden Zentren sind dann und nur dann perspektiv, wenn es einen Punkt $r_0$ derart gibt, dass

$$\Phi r_0 = o$$

ist [1]).

§ 26. Wir können den Sätzen 28 und 28′ eine andere Fassung geben.

Angenommen, es gibt eine Gerade $l_0$ derart, dass

$$\psi l_0 = o$$

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 152.

ist. Wir können die Gerade $l_0$ in der Form

$$l_0 = \sum_{i=1}^{i=3} \beta_i l_i$$

darstellen, wo $l_i$ ($i=1, 2, 3$) drei beliebige nicht durch einen Punkt gehende Gerade sind. Wir haben also

$$\psi \sum_{i=1}^{i=3} \beta_i l_i = o \text{ oder } \sum_{i=1}^{i=3} \beta_i \psi l_i = o.$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung skalar nacheinander mit $l_k$ ($k=1, 2, 3$), so bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{i=3} \beta_i l_k \psi l_i = o \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Wenn wir nun aus diesen drei Gleichungen $\beta_i$ ($i=1, 2, 3$) eliminieren, so bekommen wir

$$D = \begin{vmatrix} l_1\psi l_1 & l_1\psi l_2 & l_1\psi l_3 \\ l_1\psi l_2 & l_2\psi l_2 & l_2\psi l_3 \\ l_1\psi l_3 & l_2\psi l_3 & l_3\psi l_3 \end{vmatrix} = o.$$

Gibt es also eine Gerade $l_0$ derart, dass

$$\psi l_0 = o$$

ist, so ist für drei beliebige nicht durch einen Punkt gehende Gerade $l_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$D = o.$$

Jetzt betrachten wir die Sache umgekehrt, also setzen wir voraus, dass für gewisse drei nicht durch einen Punkt gehende Gerade $l_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$D = o$$

ist. In diesem Falle besitzen die Gleichungen

$$x\, l_k \,\psi\, l_1 + y\, l_k \,\psi\, l_2 + z\, l_k \,\psi\, l_3 = o \qquad (k = 1, 2, 3)$$

eine gemeinschaftliche von null verschiedene Lösung, es gibt also solche Zahlen $\beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ nicht alle null, für welche die Gleichungen

$$l_k \,\psi \sum_{i=1}^{i=3} \beta_i \, l_i = o \qquad (k = 1, 2, 3)$$

erfüllt sind. Weil nun die Geraden $l_k$ $(k = 1, 2, 3)$ nicht durch einen Punkt hindurchgehen, so muss

$$\psi \sum_{i=1}^{i=3} \beta_i \, l_i = o$$

oder, wenn wir

$$\sum_{i=1}^{i=3} \beta_i \, l_i \equiv l_0$$

setzen,

$$\psi \, l_0 = o$$

sein.

Ist also für gewisse drei nicht durch einen Punkt gehende Gerade $l_i$ $(i = 1, 2, 3)$

$$D = o,$$

so gibt es eine Gerade $l_0$ derart, dass

$$\psi \, l_0 = o$$

ist.

Mit Rücksicht auf die Sätze 28 und 28′ können wir nun folgende Sätze aussprechen:

Satz 29: Sind zwei Punktreihen erster Ordnung perspektiv, so ist für drei beliebige nicht durch einen Punkt gehende Gerade $l_i$ $(i = 1, 2, 3)$

Satz 29′: Sind zwei Strahlenbüschel erster Ordnung perspektiv, so ist für drei beliebige nicht in einer Geraden liegende Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3)$

$$D = \begin{vmatrix} l_1\psi l_1 & l_1\psi l_2 & l_1\psi' l_3 \\ l_1\psi l_2 & l_2\psi l_2 & l_2\psi l_3 \\ l_1\psi l_3 & l_2\psi l_3 & l_3\psi l_3 \end{vmatrix} = 0;$$

umgekehrt, ist im Falle zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung mit getrennt liegenden Trägern für gewisse drei nicht durch einen Punkt gehende Gerade $l_i$ $(i=1,2,3)$

$$D = 0,$$

so sind die Punktreihen perspektiv.

$$D' = \begin{vmatrix} r_1\Phi r_1 & r_1\Phi r_2 & r_1\Phi r_3 \\ r_1\Phi r_2 & r_2\Phi r_2 & r_2\Phi r_3 \\ r_1\Phi r_3 & r_2\Phi r_3 & r_3\Phi r_3 \end{vmatrix} = 0;$$

umgekehrt, ist im Falle zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung mit getrennt liegenden Zentren für gewisse drei nicht in einer Geraden liegende Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3)$

$$D' = 0,$$

so sind die Strahlenbüschel perspektiv.

## IV. Projektive konlokale Punktreihen und konzentrische Strahlenbüschel erster Ordnung.

§ 27. Zwei Punktreihen erster Ordnung, deren Träger zusammenfallen, nennt man konlokal.

Zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Zentren zusammenfallen, nennt man konzentrisch.

Wegen der vollkommenen Analogie, welche zwischen diesen beiden Arten der Grundgebilde erster Stufe herrscht, werden wir nur die konlokalen Punktreihen betrachten und die betreffenden Sätze werden wir auch nur für die Punktreihen formulieren.

Wenn zwei projektive Punktreihen erster Ordnung

$$r_1 + k\, r_2 \text{ und } r'_1 + k\, r'_2$$

konlokal sind, so können wir die Vektoren $r'_1$ und $r'_2$ in der Form

$$r'_1 = \alpha_{11} r_1 + \alpha_{12} r_2 \text{ und } r'_2 = \alpha_{21} r_1 + \alpha_{22} r_2$$

darstellen.

Mit Rücksicht auf den Satz 15 können wir sagen: zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung werden durch die entsprechenden Punkte entweder in gleichen Richtungen oder in entgegengesetzten durchlaufen. Im ersten Falle werden sie gleichsinnig, im zweiten Falle gegensinnig genannt.

Durchläuft ein Punkt die erste Punktreihe in der Richtung von $r_1$ bis $r_2$ (ohne durch $-r_2$ und $-r_1$ hindurchzugehen), so durchläuft der entsprechende Punkt die zweite Punktreihe in der Richtung von $r'_1$ bis $r'_2$. Haben also die Vektoren $Vr_1r_2$ und $Vr'_1r'_2$ gleiche Sinne, so sind die beiden Punktreihen gleichsinnig, andernfalls gegensinnig. Es ist aber

$$Vr'_1r'_2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\ Vr_1r_2.$$

Satz 30: Zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung sind dann und nur dann gleichsinnig, wenn

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} > 0$$

ist; ist dagegen

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} < 0,$$

so sind dann und nur dann beide Punktreihen gegensinnig.

(Die dritte Möglichkeit, dass

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$$

oder

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$$

ist, ist ausgeschlossen, denn in diesem Falle würden die Punkte $r'_1$ und $r'_2$ zusammenfallen).

§ 28. Im Falle zweier projektiven konlokalen Punktreihen erster Ordnung können wir die zweite Punktreihe in der Form

$$\alpha_{11}r_1 + \alpha_{12}r_2 + k(\alpha_{21}r_1 + \alpha_{22}r_2)$$

oder

$$r_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}} r_2$$

darstellen (§ 27).

Wenn wir die zweite Punktreihe in der Form

$$r_1 + \lambda r_2$$

darstellen, so muss

$$\frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}} = \lambda$$

oder

$$k = -\frac{\alpha_{12} - \lambda\alpha_{11}}{\alpha_{22} - \lambda\alpha_{21}}$$

sein; die erste Punktreihe ist demnach

$$r_1 - \frac{\alpha_{12} - \lambda\alpha_{11}}{\alpha_{22} - \lambda\alpha_{21}} r_2.$$

Satz 31: Zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung können wir entweder in der Form

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}} r_2$$

oder in der Form

$$r_1 - \frac{\alpha_{12} - \lambda\alpha_{11}}{\alpha_{22} - \lambda\alpha_{21}} r_2 \text{ und } r_1 + \lambda r_2$$

darstellen.

§ 29. Jetzt kommt die Frage, ob es im Falle zweier projektiven konlokalen Punktreihen erster Ordnung solche Punkte gibt, welche sich selbst ent-

sprechen. Die Werte von k, welche diesen Punkten angehören, müssen der Gleichung

$$k = \frac{\alpha_{12} + k\,\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\,\alpha_{21}}$$

oder

$$\alpha_{21}\,k^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\,k - \alpha_{12} = 0$$

genügen (Satz 31). Diese Gleichung liefert zwei Werte für k, es gibt also zwei Doppelelemente, die reell und verschieden (hyperbolische Projektivität), reell und gleich (parabolische Projektivität) oder imaginär (elliptische Projektivität) sein können.

Die Diskriminante der letzten Gleichung ist

$$\Delta \equiv (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21},$$

woraus folgt

Satz 32: Ist im Falle zweier projektiven konlokalen Punktreihen erster Ordnung

$$\Delta \equiv (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21} > 0,$$

so ist die Projektivität hyperbolisch, ist $\Delta = 0$, so ist sie parabolisch, ist $\Delta < 0$, so ist sie elliptisch.

§ 30. Wenn zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung gegensinnig sind, so ist (Satz 30)

(1). $$\alpha_{11}\,\alpha_{22} < \alpha_{12}\,\alpha_{21},$$

also

$$\Delta \equiv (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21} > (\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 + 2(\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22}).$$

Mit Rücksicht auf (1) ist die rechte Seite der letzten Ungleichung positiv, folglich ist auch $\Delta > 0$.

Satz 33: Jede gegensinnige Projektivität ist hyperbolisch. [1])

[1]) Vgl. M.-Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 85.

Die Umkehrung des Satzes 33 gilt im allgemeinen nicht.

§ 31. Es seien im Falle einer hyperbolischen Projektivität die beiden reellen Doppelpunkte

$$r''_1 \equiv r_1 + k_1 r_2 \text{ und } r''_2 \equiv r_1 + k_2 r_2.$$

Dann ist

$$r_1 \equiv \frac{k_1 r''_2 - k_2 r''_1}{k_1 - k_2} \text{ und } r_2 \equiv \frac{r''_1 - r''_2}{k_1 - k_2}.$$

Die erste Punktreihe

$$r_1 + k r_2$$

können wir also in der Form

$$r''_1 - \frac{k - k_1}{k - k_2} r''_2$$

darstellen. Die zweite Punktreihe

$$r_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}} r_2$$

können wir, wenn wir noch berücksichtigen (§ 29) (2). $k_1 + k_2 = -\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{21}}$ und $k_1 k_2 = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}$, in der Form

$$r''_1 - \frac{\alpha_{21} k_2 + \alpha_{11}}{\alpha_{21} k_1 + \alpha_{11}} \cdot \frac{k - k_1}{k - k_2} r''_2$$

darstellen.

Angenommen, es seien unsere beiden Punktreihen gegensinnig (also hyperbolisch, Satz 33). Dann ist (Satz 30)

$$\alpha_{11}\alpha_{22} < \alpha \quad \alpha_{21}$$

oder, unter Berücksichtigung von (2),

$$\alpha_{11}[\alpha_{21}(k_1 + k_2) + \alpha_{11}] < -\alpha_{21}^2 k_1 k_2$$

oder

$$(\alpha_{21}k_1 + \alpha_{11})(\alpha_{21}k_2 + \alpha_{11}) < 0,$$

folglich ist

$$\frac{\alpha_{21}k_2 + \alpha_{11}}{\alpha_{21}k_1 + \alpha_{11}} < 0.$$

Satz 34: Bei einer gegensinnigen Projektivität sind die Doppelelemente durch jedes Paar entsprechender Elemente getrennt. [1])

§ 32. Es seien im Falle zweier reellen Doppelpunkte ($r''_1$ und $r''_2$) $r_3$, $r'_3$, $r_4$, $r'_4$ zwei beliebige Paare entsprechender Elemente. Es ist (Satz 10)

$$\frac{Vr''_1r_3}{Vr_3r''_2} : \frac{Vr''_1r_4}{Vr_4r''_2} = \frac{Vr''_1r'_3}{Vr'_3r''_2} : \frac{Vr''_1r'_4}{Vr'_4r''_2},$$

woraus folgt

$$\frac{Vr''_1r_3}{Vr_3r''_2} : \frac{Vr''_1r'_3}{Vr'_3r''_2} = \frac{Vr''_1r_4}{Vr_4r''_2} : \frac{Vr''_1r'_4}{Vr'_4r''_2},$$

also haben wir den

Satz 35: Im Falle zweier reellen Doppelelemente bilden je zwei entsprechende Elemente mit den beiden Doppelelementen ein konstantes Doppelverhältnis. [2])

Wird also beispielweise ein Paar entsprechender Elemente einer projektiven Beziehung durch die beiden Doppelelemente getrennt oder nicht, so hat jedes Paar entsprechender Elemente die gleiche Eigenschaft.

[1]) Vgl. K. Doehlemann, Proj. Geom., Leipzig (1905), S. 75.
[2]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 193.

§ 33. Es ist (Satz 27)

$$\operatorname{tg}(r_{g_1}r).\ \operatorname{tg}(r'_{g_2}r') = c,$$

folglich ist

$$\operatorname{tg}(r_{g_1}r''_1).\ \operatorname{tg}(r'_{g_2}r''_1) = \operatorname{tg}(r_{g_1}r''_2).\ \operatorname{tg}(r'_{g_2}r''_2)$$

oder

$$\operatorname{tg}(r_{g_1}r''_1).\ \operatorname{tg}[(r'_{g_2}r_{g_1}) + (r_{g_1}r''_1)] = \operatorname{tg}(r_{g_1}r''_2).\ \operatorname{tg}[(r'_{g_2}r_{g_1}) + (r_{g_1}r''_2)],$$

woraus sich nach einigen Transformationen ergibt

$$(r_{g_1}r''_2) = -(r'_{g_2}r_{g_1}) - (r_{g_1}r''_1) = -(r'_{g_2}r''_1).$$

Satz 36: Beide Doppelpunkte $r''_1$ und $r''_2$ liegen symmetrisch in Bezug auf die Mitte von $(r_{g_1}r'_{g_2})$. [1])

§ 34. Zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung sind in Involution, wenn jedem beliebigen Punkte r ein und derselbe Punkt r' entspricht, unabhängig davon, ob wir r als einen Punkt der ersten oder der zweiten Punktreihe betrachten (der Fall einer Deckung wird dabei ausgeschlossen).

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung in Involution seien, ist: es muss für jeden Wert von k

$$\frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}} = -\frac{\alpha_{12} - k\alpha_{11}}{\alpha_{22} - k\alpha_{21}}$$

oder

$$(\alpha_{11} + \alpha_{22})[\alpha_{21}k^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})k - \alpha_{12}] = 0$$

sein (Satz 31).

[1]) Vgl. M.-Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 85.

Diese Gleichung wird dann für jeden Wert von k erfüllt, wenn entweder

$$\alpha_{11} = -\alpha_{22}$$

oder

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \text{ und } \alpha_{11} = \alpha_{22}$$

ist; im zweiten Falle haben wir eine Deckung (Satz 31), was ausgeschlossen ist, es bleibt also die erste Möglichkeit übrig.

Satz 37: Zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung sind dann und nur dann in Involution, wenn

$$\alpha_{11} = -\alpha_{22}$$

ist.

Es entspricht immer dem Punkte $r_1$, aufgefasst als ein Punkt der ersten Punktreihe, der Punkt (Satz 31)

$$r_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} r_2$$

und, aufgefasst als ein Punkt der zweiten Punktreihe, der Punkt

$$r_1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} r_2.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese beiden Punkte zusammenfallen, ist

$$\alpha_{11} = -\alpha_{22}.$$

Weil nun $r_1$ ein beliebiger Punkt des gemeinsamen Trägers ist, so können wir mit Rücksicht auf den Satz 37 sagen:

Satz 38: Wenn in einer projektiven konlokalen resp. konzentrischen Beziehung die beiden einem Elemente entsprechenden Elemente zusammenfallen,

so fallen sie für jedes Element zusammen, d. h. beide Grundgebilde erster Stufe sind in Involution. [1])

§ 35. Seien $r_1$, $r'_1$, $r_2$, $r'_2$ zwei Paare entsprechender Elemente einer Involution. Die Vektoren $r'_1$ und $r'_2$ müssen von der Form

$$r'_1 = m(-\alpha_{22}r_1 + \alpha_{12}r_2) \text{ und } r'_2 = n(\alpha_{21}r_1 + \alpha_{22}r_2)$$

sein (Satz 37). Wählen wir $\alpha_{22}$ beliebig und dann berechnen $\alpha_{12}$ und $\alpha_{21}$ aus den Gleichungen

$$Vr'_1(-\alpha_{22}r_1 + \alpha_{12}r_2) = o \text{ und } Vr'_2(\alpha_{21}r_1 + \alpha_{22}r_2) = o.$$

Jetzt haben wir also zwei ganz bestimmte Vektoren

$$r'_{10} \equiv -\alpha_{22}r_1 + \alpha_{12}r_2 \text{ und } r'_{20} \equiv \alpha_{21}r_1 + \alpha_{22}r_2,$$

die mit den Vektoren $r'_1$ und $r'_2$ zusammenfallen.

Es ist

$$(r_1\, r_2\, r'_{10}\, r_1 + r_2) = (r'_{10}\, r'_{20}\, r_1\, r'_{10} + r'_{20}),$$

d. h. es entspricht dem Punkte $r_1 + r_2$ der Punkt $r'_{10} + r'_{20}$, wir können also beide Punktreihen in der Form

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_{10} + kr'_{20}$$

darstellen (Satz 14), folglich sind sie vollkommen bestimmt.

Satz 39: Eine Involution ist durch zwei Paare entsprechender Elemente vollkommen bestimmt. [1])

§ 36. Nach dem letzten Satze ist eine Involution durch zwei Paare entsprechender Elemente bestimmt. Drei Paare entsprechender Elemente einer Involution sind demnach nicht voneinander unabhängig. In der Tat ist

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 86.

(3). $$(r_1 r_2 r'_1 r'_3) = (r'_1 r'_2 r_1 r_3)$$

oder (§ 5)

$$\frac{\sin(r_1 r'_1)}{\sin(r'_1 r_2)} : \frac{\sin(r_1 r'_3)}{\sin(r'_3 r_2)} = \frac{\sin(r'_1 r_1)}{\sin(r_1 r'_2)} : \frac{\sin(r'_1 r_3)}{\sin(r_3 r'_2)}$$

oder

(4). $$\frac{\sin(r_1 r'_2)}{\sin(r'_1 r_2)} \cdot \frac{\sin(r_2 r'_3)}{\sin(r'_2 r_3)} \cdot \frac{\sin(r_3 r'_1)}{\sin(r'_3 r_1)} = -1.$$

Sind also zwei Punktreihen involutorisch, so besteht zwischen drei beliebigen Paaren entsprechender Punkte die Relation (4).

Jetzt betrachten wir die Sache umgekehrt. Angenommen, es besteht zwischen den sechs Punkten $r_i$, $r'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Relation (4). Wir können dann von dieser Relation zu der Relation (3) und von (3) zu

$$(r_1 r_2 r'_3 r'_1) = (r'_1 r'_2 r_3 r_1)$$

übergehen. Betrachten wir nun die Punkte $r_1$, $r_2$, $r'_3$ und $r'_1$, $r'_2$, $r_3$ als entsprechend, so ist durch diese drei Paare eine projektive Beziehung bestimmt. Aus der letzten Gleichung folgt aber, dass dem Punkte $r'_1$, aufgefasst als ein Punkt der ersten Punktreihe, auch der Punkt $r_1$ entspricht, folglich ist unsere Beziehung involutorisch (Satz 38).

Satz 40: Gehören drei Punktpaare $r_i$, $r'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ einer Involution an, so ist die Relation

$$\frac{\sin(r_1 r'_2)}{\sin(r'_1 r_2)} \cdot \frac{\sin(r_2 r'_3)}{\sin(r'_2 r_3)} \cdot \frac{\sin(r_3 r'_1)}{\sin(r'_3 r_1)} = -1$$

erfüllt, und umgekehrt. [1])

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 90.

§ 37. Aus den Sätzen 30, 32 und 37 folgt

Satz 41: Jede gleichsinnige Involution ist elliptisch und umgekehrt, jede gegensinnige Involution ist hyperbolisch und umgekehrt. [1])

§ 38. Im Falle einer parabolischen Involution ist (Sätze 32 u. 37)

$$\alpha_{11} = -\alpha_{22} \text{ und } \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} = 0.$$

Für alle Werte von k und $\lambda$, mit Ausnahme des Wertes $\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}$, können wir also dann die beiden Punktreihen entweder in der Form

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r_1 + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} r_2$$

oder in der Form

$$r_1 + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} r_2 \text{ und } r_1 + \lambda r_2$$

darstellen (Satz 31) und im Falle

$$k = \lambda = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}$$

haben wir (Satz 31)

$$r_1 + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} r_2 \text{ und } r_1 + \tfrac{0}{0} r_2, \quad r_1 + \tfrac{0}{0} r_2 \text{ und } r_1 + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} r_2.$$

Es entspricht also jedem Punkte in beiden Punktreihen ein und derselbe Punkt

$$r_1 + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} r_2,$$

und umgekehrt. Dieser Punkt ist aber nichts anderes, als der Doppelpunkt unserer parabolischen In-

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 160.

volution, denn die Gleichung für die Bestimmung der Doppelelemente ist hier (§ 29 u. Satz 37)

$$\alpha_{21} k^2 - 2 \alpha_{22} k - \alpha_{12} = 0,$$

woraus folgt

$$k = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} .$$

Satz 42: In einer parabolischen Involution entspricht dem Doppelelemente jedes Element und umgekehrt. [1])

Man nennt deshalb die parabolische Involution auch eine uneigentliche Involution.

§ 39. Seien $r_i$, $r'_i$ $(i = 1, 2)$ zwei Paare entsprechender Punkte einer Involution. Die Vektoren $r'_i$ $(i = 1, 2)$ müssen von der Form

$$r'_1 = m(-\alpha_{22} r_1 + \alpha_{12} r_2) \text{ und } r'_2 = n(\alpha_{21} r_1 + \alpha_{22} r_2)$$

sein (Satz 37). Es ist (§ 7)

$$(r_1 r_2 r'_1 r'_2) = -\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}^2} ,$$

folglich ist (Sätze 3 u. 2)

$$(r_1 r'_1 r_2 r'_2) = \frac{\alpha_{22}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}^2} \text{ und } (r_1 r'_1 r'_2 r_2) = \frac{\alpha_{22}^2}{\alpha_{22}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21}} .$$

Das Zeichen des letzten Doppelverhältnisses ist also konstant, unabhängig von der Wahl der Punkte $r_i$ $(i = 1, 2)$ (Sätze 32 u. 37).

Satz 43: Eine Involution ist elliptisch, parabolisch, hyperbolisch, je nachdem für zwei beliebige Paare entsprechender Punkte $r_i$, $r'_i$ $(i = 1, 2)$

$$(r_1 r'_1 r_2 r'_2) < 0, = 0 \text{ oder } \infty , > 0$$

ist.

[1]) Vgl. K. Doehlemann, Proj. Geom., Leipzig (1905), S. 90.

§ 40. Im Falle einer hyperbolischen Involution gibt es zwei reelle nicht zusammenfallende Doppelelemente $r''_i$ $(i = 1, 2)$. Nehmen wir ein beliebiges Paar entsprechender Elemente $r$ und $r'$, so haben wir

$$(r''_1 r''_2 r r') = (r''_1 r''_2 r' r)$$

oder (Satz 2)

$$(r''_1 r'_2 r r') = 1 : (r''_1 r''_2 r r'),$$

folglich ist

$$(r''_1 r''_2 r r')^2 = 1.$$

$r''_1$ fällt mit $r''_2$ nicht zusammen, ebensowenig $r$ mit $r'$, also kann $(r''_1 r''_2 r r')$ nicht gleich 1 sein (Satz 5), folglich ist

$$(r''_1 r''_2 r r') = -1.$$

Satz 44: Ein jedes Paar entsprechender Elemente einer hyperbolischen Involution wird durch deren Doppelelemente harmonisch getrennt. [1])

§ 41. Es gibt immer im Falle einer Projektivität ein reelles Paar der um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernten Punkte, deren zugeordnete Punkte auch um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind (Satz 25). Weil die Involution ein Spezialfall von der Projektivität ist, so gibt es ein solches Paar der Punkte auch im Falle einer Involution; nennen wir sie

$$r_{g1} \equiv r_1 + n_1 r_2 \text{ und } r_{g2} \equiv r_1 + n_2 r_2.$$

Ihre zugeordneten Punkte sind

$$m_1 r'_{g1} \equiv r'_1 + n_1 r'_2 \text{ und } m_2 r'_{g2} \equiv r'_1 + n_2 r'_2.$$

[1]) Vgl. T. Reye, D. Geom. d. Lage, erste Abt., Leipzig (1899), S. 151.

Es ist

$$(r_1 + n_1 r_2)(r_1 + n_2 r_2) \equiv 0 \text{ und } (r'_1 + n_1 r'_2)(r'_1 + n_2 r'_2) \equiv 0$$

oder

$$r_1^2 + (n_1 + n_2) r_1 r_2 + n_1 n_2 r_2^2 \equiv 0 \text{ und } r'^2_1 + (n_1 + n_2) r'_1 r'_2 + n_1 n_2 r'^2_2 \equiv 0.$$

Wenn wir nun in die letzte Gleichung

$$r'_1 \equiv -\alpha_{22} r_1 + \alpha_{12} r_2 \text{ und } r'_2 \equiv \alpha_{21} r_1 + \alpha_{22} r_2$$

einsetzen, dann aus den beiden letzten Gleichungen $n_1 + n_2$ und $n_1 n_2$ auflösen, den für $n_1 n_2$ gefundenen Wert mit $\alpha_{21}$ und den für $n_1 + n_2$ gefundenen Wert mit $\alpha_{22}$ multiplizieren und zum Schluss die erhaltenen Produkte voneinander subtrahieren, so bekommen wir

$$\alpha_{21} n_1 n_2 - \alpha_{22}(n_1 + n_2) \equiv \alpha_{12},$$

woraus folgt

$$(5) \qquad n_i \equiv \frac{\alpha_{12} + n_k \alpha_{22}}{-\alpha_{22} + n_k \alpha_{21}} \qquad \begin{pmatrix} i=1 & k=2 \\ i=2 & k=1 \end{pmatrix}.$$

Die den Punkten

$$r_{g1} \equiv r_1 + n_1 r_2 \text{ und } r_{g2} \equiv r_1 + n_2 r_2$$

entsprechenden Punkte sind (Sätze 31 u. 37)

$$r'_{g1} \equiv r_1 + \frac{\alpha_{12} + n_1 \alpha_{22}}{-\alpha_{22} + n_1 \alpha_{21}} r_2 \text{ und } r'_{g2} \equiv r_1 + \frac{\alpha_{12} + n_2 \alpha_{22}}{-\alpha_{22} + n_2 \alpha_{21}} r_2$$

oder mit Rücksicht auf (5)

$$r'_{g1} \equiv r_1 + n_2 r_2 \text{ und } r'_{g2} \equiv r_1 + n_1 r_2.$$

Satz 45: Im Falle einer Punktinvolution fallen $r_{g1}$ mit $r'_{g2}$ und $r_{g2}$ mit $r'_{g1}$ zusammen.

§ 42. Aus den Sätzen 27 und 45 folgt, dass wir im Falle einer Involution

$$\operatorname{tg}(r_{g_1} r) \cdot \operatorname{tg}(r_{g_1} r') = \operatorname{ctg}(r_{g_2} r) \cdot \operatorname{ctg}(r_{g_2} r') = c$$

haben. Die beiden Doppelelemente finden wir also aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}(r_{g_1} r) = \operatorname{ctg}(r_{g_2} r) = \pm \sqrt{c}\,.$$

Es gibt also in zwei involutorischen Punktreihen erster Ordnung zwei Doppelpunkte. Ist $c > o$, so gibt es zwei reelle und verschiedene Doppelpunkte, zwischen denen $r_{g_1}$ und $r_{g_2}$ die Mitten sind; ist $c < o$, so gibt es zwei imaginäre Doppelpunkte; ist $c = o$ oder $c = \infty$, so fallen beide Doppelpunkte mit $r_{g_1}$ oder $r_{g_2}$ zusammen.

Da für alle Punkte r, mit Ausnahme $r = r_{g_2}$, die Gleichung

$$\operatorname{tg}(r_{g_1} r_{g_1}) \cdot \operatorname{tg}(r_{g_1} r) = o$$

gilt, da weiter dem Punkte $r_{g_2} = r'_{g_1}$ der Punkt $r_{g_1}$ entspricht, so können wir sagen, dass im Falle $c = o$ dem Doppelpunkte $r_{g_1}$ jeder Punkt entspricht (ganz ähnlich enspricht im Falle $c = \infty$ dem Doppelpunkte $r_{g_2}$ jeder Punkt). Das haben wir schon früher in anderer Weise bewiesen (Satz 42).

Satz 46: Im Falle einer hyperbolischen Punktinvolution sind $r_{g_1}$ und $r_{g_2}$ die Mitten zwischen den beiden Doppelpunkten; im Falle einer parabolischen Involution fallen beide Doppelpunkte mit $r_{g_1}$ oder $r_{g_2}$ zusammen.

§ 43. In zwei projektiven konlokalen Punktreihen erster Ordnung, wie im allgemeinen, gibt es

zwei Paare entsprechender Punkte, die um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind; gibt es drei solche reellen Paare, so sind alle Punkte um $\frac{\pi}{2}$ von ihren entsprechenden entfernt (Satz 24).* Wir können im letzten Falle die beiden Punktreihen in der Form

$$r_1 + k r_2 \text{ und } r_1 - \frac{r_1^2 + k r_1 r_2}{r_1 r_2 + k r_2^2} r_2$$

darstellen (§ 23), folglich ist

$$\alpha_{11} = r_1 r_2 = -\alpha_{22},$$

also sind unsere Punktreihen involutorisch (Satz 37).

Satz 47: Es gibt immer im Falle zweier projektiven konlokalen Punktreihen erster Ordnung zwei Paare entsprechender Punkte, die um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind; gibt es drei solche reellen Paare, so sind alle Punkte um $\frac{\pi}{2}$ von ihren entsprechenden entfernt und wir haben dann eine sg. zirkulare Involution.

§ 44. Als wir über die nicht konlokalen und konzentrischen Grundgebilde erster Stufe sprachen, haben wir gezeigt, in welcher Weise man zwei projektive Grundgebilde erster Stufe vervollständigen kann. Um nun z. B. zwei projektive konlokale Punktreihen erster Ordnung zu vervollständigen, bilden wir zwei zu ihnen perspektive (also untereinander projektive), aber nicht konzentrische Strahlenbüschel erster Ordnung; mit Hilfe dieser können wir schon leicht die Vervollständigung ausführen.

## V. Die Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe.

§ 45. Unter dem Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung versteht man die Kurve, welche die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte umhüllen.

Unter dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung versteht man den geometrischen Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen.

Wir werden nur die Eigenschaften der Erzeugnisse zweier projektiven Strahlenbüschel studieren und dann die gefundenen Resultate direkt auf die Erzeugnisse zweier projektiven Punktreihen dualistisch übertragen.

§ 46. Die Gleichungen zweier entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung sind

$$\mathfrak{r}\,(\mathfrak{l}_1 + k\mathfrak{l}_2) = 0 \text{ und } \mathfrak{r}\,(\mathfrak{l}'_1 + k\,\mathfrak{l}'_2) = 0.$$

Bei veränderlichem k repräsentieren beide diese Gleichungen zusammen das Erzeugnis der beiden projektiven Strahlenbüschel. Wir können für dieses Erzeugnis nur eine einzige Gleichung bekommen, wenn wir aus den beiden letzten Gleichungen k eliminieren. Es ist also

$$(1). \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{r}\mathfrak{l}_1 & \mathfrak{r}\mathfrak{l}_2 \\ \mathfrak{r}\mathfrak{l}'_1 & \mathfrak{r}\mathfrak{l}'_2 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel. Diese Gleichung können wir auch in der Form

$$\mathfrak{r}\Phi\mathfrak{r} = 0$$

schreiben (§ 25).

Satz 48: Die Gleichung des Erzeugnisses zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r'_1 + kr'_2$$

ist

$$|\Phi| = 0.$$

Satz 48′: Die Gleichung des Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung

$$l_1 + kl_2 \text{ und } l'_1 + kl'_2$$

ist

$$r\Phi r = 0.$$

Jetzt wollen wir die geometrische Bedeutung dieses Erzeugnisses studieren.

Um die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit unserer Kurve zu bestimmen, nehmen wir in dieser Geraden zwei Punkte $r_0$ und $r'_0$ und suchen wir diejenigen Werte von m, welche der Gleichung

$$(2). \qquad (r_0 + m\, r'_0)\, \Phi\, (r_0 + m\, r'_0) = 0$$

genügen. Diese Gleichung liefert zwei Werte für m, folglich liefert jede Gerade mit unserer Kurve zwei Schnittpunkte (die auch imaginär sein können); das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel ist also eine Kurve zweiter Ordnung. In dieser Kurve liegen auch die beiden Zentren $Vl_1l_2$ und $Vl'_1l'_2$ unserer Strahlenbüschel, denn setzt man in der Gleichung (1) r gleich einem dieser Vektoren, so verschwinden in der Determinante die Elemente einer Zeile.

Wenn alle Koeffizienten in der Gleichung (2) null sind, d. h. wenn

$$(3). \qquad r_0\Phi r_0 = r'_0\Phi r'_0 = r_0\Phi r'_0 = 0$$

ist, so genügt jeder Wert von m der Gleichung (2), es gehören also dem Erzeugnis alle Punkte der Ge-

raden $Vr_0r'_0$. Aus den Gleichungen (3) folgt, dass, wenn wir noch einen ganz beliebigen Punkt $r''_0$ hinzunehmen, $D' = 0$ ist, dann sind aber die Strahlenbüschel, wenn sie nicht konzentrisch sind, perspektiv (Satz 29'). Wollen wir die Gleichung des Erzeugnisses für diesen Fall suchen.

Sind $r_e$ und $r'_e$ die Zentren zweier perspektiven Strahlenbüschel, $r_0$ und $r'_0$ zwei beliebige nicht zusammenfallende Punkte ihrer Perspektivitätsachse, so können wir die beiden perspektiven Strahlenbüschel in der Form

$$Vr_e\,(r_0 + k\,r'_0) \text{ und } Vr'_e\,(r_0 + k\,r'_0)$$

darstellen, die Gleichung ihres Erzeugnisses ist also

$$\begin{vmatrix} [r\,r_e r_0] & [r\,r_e r'_0] \\ [r\,r'_e r_0] & [r\,r'_e r'_0] \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$[Vr_e r'_e\ Vr_0 r\ Vr'_0 r] = 0$$

oder

$$[r\,r_e r'_e] \cdot [r\,r_0 r'_0] = 0.$$

Das Erzeugnis zerfällt also in zwei Gerade $Vr_0r'_0$ und $Vr_er'_e$, d. h. es besteht aus der Perspektivitätsachse nnd der Verbindungsgeraden der beiden Zentren.

§ 47. Die Gleichung des Erzeugnisses zweier projektiven konzentrischen Strahlenbüschel erster Ordnung ist

$$\begin{vmatrix} r\mathfrak{l}_1 & r\mathfrak{l}_2 \\ r\,(\alpha_{11}\mathfrak{l}_1 + \alpha_{12}\mathfrak{l}_2) & r\,(\alpha_{21}\mathfrak{l}_1 + \alpha_{22}\mathfrak{l}_2) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$r\,[2\,\alpha_{21}\mathfrak{l}_1 - (\alpha_{11} - \alpha_{22} + \sqrt{\Delta})\,\mathfrak{l}_2].\ r\,[2\,\alpha_{21}\mathfrak{l}_1 - (\alpha_{11} - \alpha_{22} - \sqrt{\Delta})\,\mathfrak{l}_2] = 0,$$

wo

$$\Delta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}$$

ist, folglich besteht das Erzeugnis aus den beiden Doppelstrahlen (§ 29).

Satz 49: Zwei projektive Punktreihen erster Ordnung bestimmen durch die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte eine Kurve zweiter Klasse, welche auch die Träger der beiden Punktreihen berühren; sind die Punktreihen perspektiv oder konlokal, so zerfällt die von ihnen erzeugte Kurve zweiter Klasse in ein Punktpaar, das in dem ersten Falle aus dem Perspektivitätszentrum und dem Schnittpunkte der beiden Träger und in dem zweiten Falle aus den beiden Doppelpunkten gebildet wird.

Satz 49′: Zwei projektive Strahlenbüschel erster Ordnung bestimmen durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen eine Kurve zweiter Ordnung, welcher auch die Zentren der beiden Strahlenbüschel angehören; sind die Strahlenbüschel perspektiv oder konzentrisch, so zerfällt die von ihnen erzeugte Kurve zweiter Ordnung in ein Geradenpaar, das in dem ersten Falle aus der Perspektivitätsachse und der Verbindungsgeraden der beiden Zentren und in dem zweiten Falle aus den beiden Doppelstrahlen gebildet wird. [1])

§ 48. Nehmen wir zwei Punkte

$$V\,(l_1 + k_i\,l_2)\,(l'_1 + k_i\,l'_2) \qquad (i = 1, 2)$$

des Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung. Verbinden wir jeden dieser Punkte mit allen Punkten des Erzeugnisses, so bekommen wir die Strahlenbüschel erster Ordnung

$$V\,V(l_1 + k_i\,l_2)(l'_1 + k_i\,l'_2)V(l_1 + k\,l_2)(l'_1 + k\,l'_2) \quad (i = 1, 2)$$

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 69.

oder (nach Division durch $k - k_i$)

$$V V_{l_1 l'_1} (V_{l_1 l'_2} + V_{l_2 l'_1} + k_i V_{l_2 l'_2}) + k V[V_{l_1 l'_1} + + k_i (V_{l_1 l'_2} + V_{l_2 l'_1})] V_{l_2 l'_2} \qquad (i = 1, 2).$$

Satz 50: Die Tangenten eines Erzeugnisses zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung schneiden zwei beliebige von ihnen in zwei projektiven Punktreihen erster Ordnung.

Satz 50′: Die Punkte eines Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung werden aus zwei beliebigen von ihnen durch zwei projektive Strahlenbüschel erster Ordnung projeziert.[1])

§ 49. Um die Schnittpunkte zu bestimmen, welche die Verbindungsgerade der Punkte $r_0$ und $r'_0$ mit dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung liefert, brauchen wir nur die Gleichung

$$(r_0 + m r'_0) \Phi (r_0 + m r'_0) = 0$$

oder

$$(4). \qquad r_0 \Phi r_0 + 2 m r_0 \Phi r'_0 + m^2 r'_0 \Phi r'_0 = 0$$

in Bezug auf m zu lösen. Angenommen, wir finden aus dieser Gleichung die Werte $m_1$ und $m_2$, dann ist das Doppelverhältnis der beiden Schnittpunkte in Bezug auf die Punkte $r_0$ und $r'_0$ gleich $\frac{m_1}{m_2}$ (§ 7). Sollen nun diese Punkte harmonisch koniugiert sein, so muss

$$m_1 = - m_2$$

sein, folglich muss der Koeffizient von m in der Gleichung (4) gleich null sein, d. h. es muss

$$r_0 \Phi r'_0 = 0 \text{ oder } r'_0 \Phi r_0 = 0$$

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 59.

sein. Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass entweder $r_0$ beliebig in der Geraden $\Phi r'_0$ gewählt werden kann, oder $r'_0$ beliebig in der Geraden $\Phi r_0$.

Die Gerade $\Phi r_0$ heisst nun die Polare des Punktes $r_0$ in Bezug auf unser Erzeugnis.

Satz 51: Der Vektor des Pols einer Geraden $l_0$ in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung ist $\psi l_0$, die Gleichung dieses Pols ist

$$l\psi l_0 = 0.$$

Satz 51′: Der Vektor der Polare eines Punktes $r_0$ in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung ist $\Phi r_0$, die Gleichung dieser Polare ist

$$r\Phi r_0 = 0.$$

§ 50. Wenn $r'_0$ in der Polare von $r_0$ liegt, so ist (Satz 51′)

$$r'_0 \Phi r_0 = 0, \text{ also auch } r_0 \Phi r'_0 = 0,$$

folglich haben wir

Satz 52: Der Pol einer Geraden $l'_0$, die durch den Pol von $l_0$ hindurchgeht, liegt in der Geraden $l_0$.

Satz 52′: Die Polare eines Punktes $r'_0$, der in der Polare von $r_0$ liegt, geht durch den Punkt $r_0$ hindurch.

§ 51. Wenn $r_0$ dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel angehört, so ist (Satz 48′)

$$r_0 \Phi r_0 = 0.$$

Das ist aber genau die Bedingung dafür, dass die Polare von $r_0$ durch den Punkt $r_0$ selbst hindurchgeht.

Satz 53: Der Pol einer Tangente zu dem Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ord-

Satz 53′: Die Polare eines Punktes des Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ord-

nung in Bezug auf dieses Erzeugnis liegt in dieser Tangente selbst, und umgekehrt.

nung in Bezug auf dieses Erzeugnis geht durch diesen Punkt selbst hindurch, und umgekehrt.

Wir können aber noch mehr bemerken.

Zu der Bestimmung der Schnittpunkte, welche die Verbindungsgerade des Punktes $r_0$ und eines beliebigen Punktes $r'_0$ der Polare von $r_0$ mit dem Erzeugnis liefert, dient die Gleichung (§ 49)

$$r_0 \Phi r_0 + m^2 r'_0 \Phi r'_0 = 0.$$

Gehört nun $r_0$ dem Erzeugnis an, so reduziert sich diese Gleichung auf

$$m^2 r'_0 \Phi r'_0 = 0,$$

es sind also die beiden Werte von m gleich null, folglich fallen beide Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $Vr_0r'_0$ (d. h. der Polare von $r_0$) mit dem Erzeugnis mit $r_0$ zusammen, also ist die Polare von $r_0$ die Tangente im Punkte $r_0$.

Satz 54: Der Pol einer Tangente zu dem Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung in Bezug auf dieses Erzeugnis ist der Berührungspunkt dieser Tangente.

Satz 54′: Die Polare eines Punktes des Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung in Bezug auf dieses Erzeugnis ist die Tangente daselbst. [1])

§ 52. Für jeden Wert von k repräsentiert der Vektor $V(l_1 + kl_2)(l'_1 + kl'_2)$ einen Punkt des Er-

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 99.

zeugnisses zweier projektiven (nicht perspektiven und nicht konzentrischen) Strahlenbüschel erster Ordnung

$$l_1 + kl_2 \text{ und } l'_1 + kl'_2.$$

Die Tangente in einem solchen Punkte ist (Sätze 54′ u. 51′)

$$\Phi V(l_1 + kl_2)(l'_1 + kl'_2)$$

oder

$$V[Vl_1l'_1 + \tfrac{1}{2}k(Vl_1l'_2 + Vl_2l'_1)][(Vl_1l'_2 + Vl_2l'_1) + 2kVl_2l'_2].$$

Das ist aber bei veränderlichem k das Erzeugnis zweier projektiven (nicht perspekt. u. nicht konlok.) Punktreihen

$$Vl_1l'_1 + \tfrac{1}{2}k(Vl_1l'_2 + Vl_2l'_1) \text{ und } (Vl_1l'_2 + Vl_2l'_1) + 2kVl_2l'_2.$$

Satz 55: Das Erzeugnis zweier projektiven (nicht persp. u. nicht konl.) Punktreihen erst. Ordn. $r_1 + kr_2$ und $r'_1 + kr'_2$ ist zu gleicher Zeit das Erzeugnis zweier projektiven (nicht persp. u. nicht konzentr.) Strahlenbüschel erst. Ordn. $Vr_1r'_1 + \frac{1}{2}k(Vr_1r'_2 + Vr_2r'_1)$ und $(Vr_1r'_2 + Vr_2r'_1) + 2k\,Vr_2r'_2$

Satz 55′: Das Erzeugnis zweier projektiven (nicht persp. u. nicht konzentr.) Strahlenbüschel erst. Ordn. $l_1 + kl_2$ und $l'_1 + kl'_2$ ist zu gleicher Zeit das Erzeugnis zweier projektiven (nicht persp. u. nicht konl.) Punktreihen erster Ordn. $Vl_1l'_1 + \frac{1}{2}k(Vl_1l'_2 + Vl_2l'_1)$ und $(Vl_1l'_2 + Vl_2l'_1) + 2k\,Vl_2l'_2$. [1])

Nach den Sätzen 55′ und 49 ist das Erzeugnis zweier projektiven (nicht persp. u. nicht konz.) Strahlenbüschel erster Ordnung eine Kurve zweiter Klasse, es gehen also durch jeden Punkt der Kugelfläche zwei Tangenten zu diesem Erzeugnis (die

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 69.

auch imaginär sein können). Gehen durch einen Punkt $r$ zwei reelle Tangenten zu dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordn., so sind diese Tangenten die Polaren ihrer Berührungspunkte (Satz 54′), folglich liegen beide Berührungspunkte in der Polare von $r$ (Satz 52′).

Satz 56: Schneidet eine Gerade $l$ das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erst. Ordn. in zwei reellen Punkten, so gehen die Tangenten in diesen Schnittpunkten durch den Pol von $l$ hindurch.

Satz 56′: Gehen durch einen Punkt $r$ zwei reelle Tangenten zu dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordnung, so liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten in der Polare von $r$.[1])

§ 53. Nach den Sätzen 55 und 55′ verschwindet ganz der Unterschied zwischen den Erzeugnissen zweier projektiven (n. persp. u. n. konl.) Punktreihen erst. Ordn. und zweier projektiven (n. persp. u. n. konz.) Strahlenbüschel erster Ordn. Wir können also jetzt über die Polare eines Punktes nicht nur in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordn. sprechen, sondern auch in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven (n. persp. u. n. konl.) Punktreihen erst. Ordnung; ganz ähnliches gilt für den Pol.

Die Polare eines Punktes $r_0$ in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung

$$l_1 + kl_2 \text{ und } l'_1 + kl'_2$$

ist $\Phi r_0$ (Satz 51′). Der Pol der Geraden $\Phi r_0$ in Bezug auf dieses Erzeugnis ist (Sätze 55′ u. 51)

$$2\,[\Phi r_0\, l_2 l'_2]\, V l_1 l'_1 + 2\,[\Phi r_0\, l_1 l'_1]\, V l_2 l'_2 - ([\Phi r_0\, l_1 l'_2] + [\Phi r_0\, l_2 l'_1])\,(V l_1 l'_2 + V l_2 l'_1),$$

[1]) Vlg. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 99.

woraus sich nach einigen einfachen Transformationen unabhängig von einem von null verschiedenen Zahlenfaktor ergibt $r_0$.

Satz 57: Ist $l_0$ die Polare von $r_0$ in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven (n. persp. u. n. konl. resp. konz.) Grundgebilde erster Stufe, so ist $r_0$ der Pol von $l_0$ in Bezug auf dieses Erzeugnis, und umgekehrt.

Diesen Satz kann man auch in anderer Weise, nämlich rein geometrisch, beweisen. Wir wollen z. B. den ersten Teil dieses Satzes beweisen.

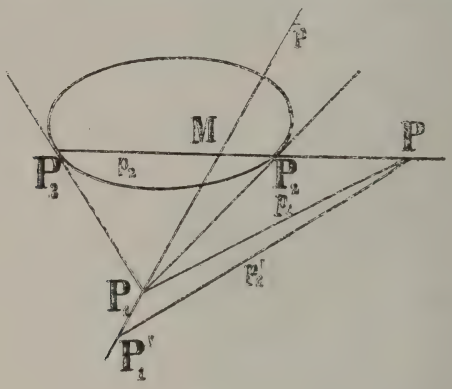


Fig. 1.

Angenommen, es sei das Erzeugnis zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe gegeben und es sei p die Polare von P in Bezug auf dieses Erzeugnis (Fig. 1; in dieser Figur sind alle sphärischen Geraden als ebene Gerade gezeichnet). Nehmen wir in p einen Punkt $P_1$, aus welchem man zwei reelle Tangenten zu dem gegebenen Erzeugnis ziehen kann, konstruieren wir diese Tangenten und verbinden wir $P_1$ mit P; sei diese Verbindungsgerade $p_1$. Die Verbindungsgerade $p_2$ der beiden Berührungspunkte ist

die Polare von $P_1$ (Satz 56'), also muss $p_2$ durch P gehen (Satz 52). Weil p die Polare von P ist, so sind $P_2$ und $P_3$ in Bezug auf P und M harmonisch koniugiert, folglich sind es auch unsere beiden Tangenten in Bezug auf p und $p_1$ (Satz 6), also liegt der Pol von p in der Geraden $p_1$. Nehmen wir nun in p einen anderen Punkt $P'_1$, aus welchem man auch zwei reelle Tangenten ziehen kann, so werden wir ebenso beweisen können, dass in der Geraden $p'_1$, welche auch durch P geht, der Pol von p liegt. Der Schnittpunkt von $p_1$ und $p'_1$, d. h. der Punkt P, ist also der Pol von p.

§ 54. Nach dem Satze 57 ist r der Pol von $\Phi\mathfrak{r}$ in Bezug auf das Erzeugnis zweier projektiven (n. persp. u. n. konl. resp. konz.) Grundgebilde erster Stufe. Es ist also

$$\psi\Phi r_m = a_1 r_m, \quad \psi\Phi r_n = a_2 r_n, \quad \psi\Phi(r_m + r_n) = a_3(r_m + r_n);$$

andererseits ist aber

$$\psi\Phi(r_m + r_n) = \psi\Phi r_m + \psi\Phi r_n = a_1 r_m + a_2 r_n,$$

woraus folgt

$$a_1 r_m + a_2 r_n = a_3 (r_m + r_n)$$

oder

$$(a_1 - a_3) r_m + (a_2 - a_3) r_n = 0,$$

also ist

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Satz 58: Es ist im Falle zweier projektiven (n. persp. u. n. konl. resp. konz.) Grundgebilde erster Stufe

$$\psi\Phi\mathfrak{r} = a\mathfrak{r} \text{ und } \Phi\psi\mathfrak{l} = b\mathfrak{l},$$

wo a und b nicht von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{l}$ abhängen.

§ 55. Der Strahlenbüschel $\Phi r_1 + k\Phi r_2$ schneidet den Träger der Punktreihe $r_1 + kr_2$ in der Punktreihe

$$V\Phi r_1 v r_1 r_2 + kV\Phi r_2 v r_1 r_2$$

oder

$$(r_2\Phi r_1.r_1 - r_1\Phi r_1.r_2) + k\,(r_2\Phi r_2.r_1 - r_1\Phi r_2.r_2),$$

welche mit der Punktreihe $r_1 + kr_2$ involutorisch ist (Satz 37). Wir sagen aber, dass eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel involutorisch liegen, wenn die Punktreihe und der Schnitt ihres Trägers mit dem Strahlenbüschel involutorische Lage haben, also haben wir

Satz 59: Die Pole aller Strahlen eines Strahlenbüschels erst. Ordn. bilden eine zu diesem Strahlenbüschel involutorische Punktreihe erst. Ordn., deren Träger mit der Polare des Zentrums des Strahlenbüschels zusammenfällt.

Satz 59′: Die Polaren aller Punkte einer Punktreihe erster Ordnung bilden einen zu dieser Punktreihe involutorischen Strahlenbüschel erst. Ordn. mit Zentrum in dem Pol des Trägers der Punktreihe. [1])

§ 56. Angenommen, wir haben ein Erzeugnis zweier projektiven nicht perspektiven und nicht konzentrischen Strahlenbüschel erster Ordnung.

Jede Sekante durch einen Punkt $r_1$ schneidet die Polare von $r_1$ in einem Punkte $r_2$, welcher mit $r_1$ in Bezug auf die Schnittpunkte $r_3$ und $r_4$ der Sekante mit dem Erzeugnis harmonisch koniugiert ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $r_2$ die Mitte der betreffenden Sehne sei, ist, dass die Punkte $r_1$ und $r_2$ um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt seien.

[1]) Vlg. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 102.

In der Tat, ist $r_2$ die innere oder die äussere Mitte der betreffenden Sehne, so ist

$$m r_2 \equiv \frac{r_3}{|r_3|} \pm \frac{r_4}{|r_4|}, \text{ also } n r_1 \equiv \frac{r_3}{|r_3|} \mp \frac{r_4}{|r_4|},$$

folglich

$$r_1 r_2 = 0;$$

umgekehrt, ist $r_1 r_2 = 0$, so bezeichnen wir

$$m r_2 \equiv r_3 + \lambda r_4, \text{ dann ist } n r_1 \equiv r_3 - \lambda r_4,$$

woraus folgt

$$r_3^2 - \lambda^2 r_4^2 = 0 \text{ oder } \lambda = \pm \frac{|r_3|}{|r_4|},$$

also ist $r_2$ die innere oder die äussere Mitte der betreffenden Sehne.

Durch den Punkt $r_1$ kann man unendlich viele Sekanten ziehen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass seine Polare durch die Mitten $r_2$, $r'_2$, $r''_2$,..... aller Sehnen hindurchgehe, ist, dass $r_1$ um $\frac{\pi}{2}$ von allen Punkten seiner Polare entfernt sei; man nennt dann den Punkt $r_1$ ein Zentrum.

Man fragt nun: Gibt es Punkte, welche um $\frac{\pi}{2}$ von ihren Polaren entfernt sind?

Nehmen wir drei beliebige feste Punkte $r_i$ (i=1, 2, 3), die der Einfachheit wegen ein Oktant bilden. Gibt es ein reelles Zentrum, so müssen sich solche reellen Werte für $x_i$ (i = 1, 2, 3) finden lassen, für welche

$$S \sum_{i=1}^{i=3} x_i r_i = \Phi \sum_{i=1}^{i=3} x_i r_i$$

ist. Multiplizieren wir diese Gleichung skalar nacheinander mit $r_k$ (k = 1, 2, 3), so bekommen wir

(5). $$S x_k r_k^2 = \sum_{i=1}^{i=3} x_i r_k \Phi r_i \qquad (k = 1, 2, 3)$$

oder

$$(6). \qquad (\Phi r_k - S r_k) \sum_{i=1}^{i=3} x_i r_i = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Wenn wir nun aus diesen drei Gleichungen $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ eliminieren, so bekommen wir

$$(7). \quad \varphi(S) \equiv \begin{vmatrix} r_1\Phi r_1 - S r_1^2 & r_1\Phi r_2 & r_1\Phi r_3 \\ r_1\Phi r_2 & r_2\Phi r_2 - S r_2^2 & r_2\Phi r_3 \\ r_1\Phi r_3 & r_2\Phi r_3 & r_3\Phi r_3 - S r_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist eine in S kubische Gleichung, sie liefert also drei Werte für S. Wir können jetzt in bekannter Weise zeigen, dass alle diese drei Werte reell sind.

Angenommen, wir finden für S eine komplexe Wurzel $\tau + \sigma i$ und die damit berechneten Werte für $x_k$ $(k = 1, 2, 3)$ seien $\xi_k + \eta_k i$ $(k = 1, 2, 3)$. Setzen wir diese Werte in die Gleichungen (5), so bekommen wir zwei Systeme von Gleichungen

$$(\tau\xi_k - \sigma\eta_k) r_k^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \xi_i r_k \Phi r_i \text{ und } (\tau\eta_k + \sigma\xi_k) r_k^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \eta_i r_k \Phi r_i$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Multiplizieren wir die Gleichungen des zweiten Systems mit $\xi_k$ $(k = 1, 2, 3)$, die Gleichungen des ersten Systems mit $\eta_k$ $(k = 1, 2, 3)$ und subtrahieren wir die Summe dieser letzten von der Summe der drei ersten Gleichungen, so bekommen wir

$$\sigma \sum_{i=1}^{i=3} (\xi_i^2 + \eta_i^2) r_i^2 = 0,$$

woraus folgt

$$\sigma = 0,$$

folglich ist S reell.

Alle drei Werte für S sind reell; sie sind auch von null verschieden, denn ist etwa ein Wert null,

so ist der bekannte Term in der Gleichung (7) null, dann würden aber unsere projektiven Strahlenbüschel entweder perspektiv oder konzentrisch (§§ 25 u. 26), was der Voraussetzung widerspricht. [1])

§ 57. Es ist wohl denkbar, dass zwei oder alle drei Werte für S einander gleich sind. Wir wollen uns mit diesen beiden Fällen befassen.

Ist $S_1$ eine zweifache Wurzel, so muss die Gleichung

$$\varphi\,(S_1 - \sigma) = 0$$

für $\sigma$ die zweifache Wurzel null besitzen. Bezeichnen wir die Elemente in der Determinante $\varphi\,(S_1)$ mit $\delta_{ik}$ und die entsprechenden Minoren mit $\Delta_{ik}$, so ist die Gleichung in $\sigma$

$$\varphi\,(S_1 - \sigma) = \begin{vmatrix} \delta_{11}+\sigma r_1^2 & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{12} & \delta_{22}+\sigma r_2^2 & \delta_{23} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33}+\sigma r_2^2 \end{vmatrix} = r_1^2 r_2^2 r_3^2 \sigma^3 +$$

$$+ (\delta_{11} r_2^2 r_3^2 + \delta_{22} r_1^2 r_3^2 + \delta_{33} r_1^2 r_2^2)\,\sigma^2 + (\Delta_{11} r_1^2 + \Delta_{22} r_2^2 + \Delta_{33} r_3^2)\,\sigma + \varphi\,(S_1) = 0.$$

Soll nun diese Gleichung zweifache Wurzel null haben, so muss

$$\varphi\,(S_1) = 0 \text{ und } \Delta_{11} r_1^2 + \Delta_{22} r_2^2 + \Delta_{33} r_3^2 = 0$$

sein. Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn alle Minoren $\Delta_{ik}$ null sind. Wir wollen beweisen, dass diese letzte Bedingung nicht nur genügend, sondern auch notwendig ist.

Angenommen, es sei $\varphi\,(S_1) = 0$, aber nicht alle Minoren von $\Delta_{ik}$ würden null. In diesem Falle re-

[1]) Vgl. M.–Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 158.

duziert sich das System der Gleichungen

$$\delta_{11}y_1+\delta_{12}y_2+\delta_{13}y_3=0,\ \delta_{12}y_1+\delta_{22}y_2+\delta_{23}y_3=0,$$
$$\delta_{13}y_1+\delta_{23}y_2+\delta_{33}y_3=0$$

auf zwei voneinander unabhängige Gleichungen, aus welchen wir für $y_i$ $(i=1, 2, 3)$ die Werte finden, die nicht alle null sind und für welche gilt

$$y_1 : y_2 : y_3 = y_1^2 : y_1y_2 : y_1y_3 = \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13},$$
$$y_1 : y_2 : y_3 = y_2y_1 : y_2^2 : y_2y_3 = \Delta_{12} : \Delta_{22} : \Delta_{23},$$
$$y_1 : y_2 : y_3 = y_3y_1 : y_3y_2 : y_3^2 = \Delta_{13} : \Delta_{23} : \Delta_{33}.$$

Der Koeffizient von $\sigma$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \Delta_{ii}\, r_i^2 = \rho \sum_{i=1}^{i=3} y_i^2\, r_i^2$$

ist jetzt nicht null, folglich kann $S_1$ nicht eine zweifache Wurzel sein. Soll also unsere Gleichung eine zweifache Wurzel $S_1$ besitzen, so müssen alle Minoren $\Delta_{ik}$ null sein, d. h. es muss

$$(8).\quad \begin{cases} \delta_{22}\delta_{33}-\delta_{23}^2=0,\ \delta_{33}\delta_{11}-\delta_{13}^2=0,\ \delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2=0, \\ \delta_{12}\delta_{13}-\delta_{11}\delta_{23}=0,\ \delta_{23}\delta_{12}-\delta_{22}\delta_{13}=0,\ \delta_{13}\delta_{23}-\delta_{33}\delta_{12}=0 \end{cases}$$

sein.

Soll $S_1$ eine dreifache Wurzel sein, so muss ausser den Bedingungen (8) noch eine erfüllt sein, es muss nämlich auch der Koeffizient von $\sigma^2$ null sein. Diese Bedingungen können aber nur dann nebeneinander bestehen, wenn alle $\delta_{ik}$ null sind; denn aus den zwei ersten Gleichungen von (8) folgt, dass $\delta_{ii}$ $(i=1, 2, 3)$ gleiche Zeichen besitzen, der Koeffizient von $\sigma^2$ kann also nur dann gleich null sein, wenn $\delta_{ii}=0$ $(i=1, 2, 3)$ sind, dann müssen aber auch $\delta_{12}$, $\delta_{13}$ und $\delta_{23}$ gleich null sein (aus dem Grunde der drei ersten Gleichungen von (8)). Die Gleichung

(7) (§ 56) besitzt also dann und nur dann eine dreifache Wurzel $S_1$, wenn die Bedingungen

$$r_1\Phi r_1 = S_1 r_1^2, \quad r_2\Phi r_2 = S_1 r_2^2, \quad r_3\Phi r_3 = S_1 r_3^2,$$
$$r_1\Phi r_2 = r_2\Phi r_3 = r_3\Phi r_1 = 0$$

erfüllt sind. [1])

§ 58. Angenommen, es seien alle drei Werte von S voneinander verschieden und zwar gleich $S_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Jedem dieser Werte entspricht ein reelles Zentrum, es gibt also drei reelle voneinander verschiedene Zentren

$$\sum_{i=1}^{i=3} x'_i r_i, \quad \sum_{i=1}^{i=3} x''_i r_i \text{ und } \sum_{i=1}^{i=3} x'''_i r_i.$$

Wir haben jetzt drei Systeme von Gleichungen (§ 56, Gl. (5))

$$S_1 x'_k r_k^2 = \sum_{i=1}^{i=3} x'_i r_k \Phi r_i, \quad S_2 x''_k r_k^2 = \sum_{i=1}^{i=3} x''_i r_k \Phi r_i,$$
$$S_3 x'''_k r_k^2 = \sum_{i=1}^{i=3} x'''_i r_k \Phi r_i \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Multiplizieren wir die Gleichungen des zweiten Systems mit $x'_k$ $(k = 1, 2, 3)$ und subtrahieren wir ihre Summe von der Summe der mit $x''_k$ $(k = 1, 2, 3)$ multiplizierten Gleichungen des ersten Systems. Wir bekommen

$$(S_1 - S_2)(x'_1 r_1 + x'_2 r_2 + x'_3 r_3)(x''_1 r_1 + x''_2 r_2 + x''_3 r_3) = 0,$$

woraus folgt

$$(x'_1 r_1 + x'_2 r_2 + x'_3 r_3)(x''_1 r_1 + x''_2 r_2 + x''_3 r_3) = 0,$$

[1]) Vgl. M.-Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 160.

folglich sind beide ersten Zentren um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernt. Dasselbe können wir für zwei andere Paare der Zentren beweisen, also bilden die drei Zentren ein Oktant. [1])

§ 59. Angenommen, die Gleichung (7) (§ 56) besitzt eine zweifache Wurzel $S_1$. Wenn wir diesen Wert in die Gleichungen (5) (§ 56) einsetzen, so reduzieren sie sich nur auf eine einzige Gleichung (§ 57), es entsprechen also dem Werte $S_1$ unendlich viele Werte von $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, d. h. unendlich viele Punkte. Alle diese Punkte zusammen bilden eine sphärische Gerade, deren Vektor ist (Gl. (6) § 56)

$$\Phi r_1 - S_1 r_1 \text{ oder } \Phi r_2 - S_1 r_2 \text{ oder } \Phi r_3 - S_1 r_3.$$

Man kann beweisen, dass alle Zentren, die der zweifachen Wurzel entsprechen, um $\frac{\pi}{2}$ von dem der einfachen Wurzel entsprechenden Zentrum entfernt sind, d. h. die Gerade der Zentren fällt mit der Polare des getrennt liegenden Zentrums zusammen (der Beweis ist solcher wie im § 58). [2])

§ 60. Die Gleichung des Erzeugnisses zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordn. können wir in der Form

$$(x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)\, \Phi\, (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3) = 0$$

schreiben (Satz 48'), wo $x_i$ $(i = 1, 2\ 3)$ als veränderlich zu betrachten sind.

Nehmen wir im Falle aller verschiedenen Werte von S die drei Zentren als Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3)$, im

[1]) Vgl. M.-Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 162.

[2]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 163.

Falle zweier gleichen Werte von S zwei beliebige um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernte Punkte der Geraden der Zentren und das getrennt liegende Zentrum und im Falle dreier gleichen Werte von S drei beliebige ein Oktant bildende Punkte der Kugelfläche, so lautet die Gleichung des Erzeugnisses

$$\text{im ersten Falle } \sum_{i=1}^{i=3} S_i r_i^2 x_i^2 = 0,$$

$$\text{im zweiten Falle } S_1 \sum_{i=1}^{i=2} r_i^2 x_i^2 + S_3 r_3^2 x_3^2 = 0,$$

$$\text{im dritten Falle } \sum_{i=1}^{i=3} r_i^2 x_i^2 = 0. \text{ [1]}$$

Wir sehen jetzt, dass im dritten Falle das Erzeugnis eine imaginäre Kurve ist; dieser Fall kann also nicht zum Stande kommen, wenn beide projektive Grundgebilde erster Stufe reell sind.

§ 61. Besitzen alle Werte von S gleiche Zeichen, so ist ebenso im Falle der verschiedenen Werte wie auch im Falle zweier gleichen Werte das Erzeugnis imaginär. Wenn wir also reelle projektive Grundgebilde erster Stufe betrachten, so können nicht alle Werte von S gleiche Zeichen besitzen; es sind also dann entweder zwei Werte positiv und ein Wert negativ oder umgekehrt; im zweiten Falle können wir alle Zeichen in der Gleichung des Erzeugnisses ändern und dadurch erreichen wir, dass in dieser Gleichung zwei Terme positiv werden und ein Term negativ.

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 163.

Die Gleichung des reellen Erzeugnisses ist also

$$\text{entweder } \omega_1{}^2 r_1{}^2 x_1{}^2 + \omega_2{}^2 r_2{}^2 x_2{}^2 - \omega_3{}^2 r_3{}^2 x_3{}^2 = 0$$

$$\text{oder } \omega_1{}^2 (r_1{}^2 x_1{}^2 + r_2{}^2 x_2{}^2) - \omega_3{}^2 r_3{}^2 x_3{}^2 = 0.$$

Führen wir die Polarkoordinaten ein, wobei wir $r_3$ als Pol und $Vr_3r_1$ als Polarachse betrachten. Wir werden also die Lage eines Punktes P durch Amplitude $\varphi$ und Radiusvektor $\rho$ bestimmen (Fig. 2).

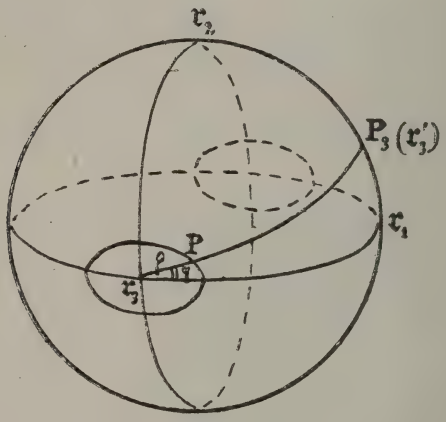


Fig. 2.

Der Einheitsvektor des Punktes $P_3$ ist

$$\sin \varphi \cdot \frac{r_2}{|r_2|} + \cos \varphi \cdot \frac{r_1}{|r_1|},$$

der Einheitsvektor des Punktes P ist

$$\sin \rho \cdot \frac{r'_3}{|r'_3|} + \cos \rho \cdot \frac{r_3}{|r_3|}$$

oder

$$\sin \rho \left( \sin \varphi \cdot \frac{r_2}{|r_2|} + \cos \varphi \cdot \frac{r_1}{|r_1|} \right) + \cos \rho \cdot \frac{r_3}{|r_3|} \cdot$$

Soll dieser Punkt dem Erzeugnis angehören, so müssen

$$x_1 = \frac{\sin \rho \,.\, \cos \varphi}{|\, r_1 \,|}, \quad x_2 = \frac{\sin \rho \,.\, \sin \varphi}{|\, r_2 \,|}, \quad x_3 = \frac{\cos \rho}{|\, r_3 \,|}$$

der Gleichung des Erzeugnisses genügen, es muss also im Falle dreier verschiedenen Werte von S

$$\operatorname{ctg}^2 \rho = \frac{\omega_1{}^2 \cos^2 \varphi + \omega_2{}^2 \sin^2 \varphi}{\omega_3{}^2}$$

und im Falle zweier gleichen Werte von S

$$\operatorname{ctg}^2 \rho = \frac{\omega_1{}^2}{\omega_3{}^2}$$

sein.

Im ersten Falle ist das Erzeugnis eine um den Punkt $r_3$ herumgeschlossene Kurve (weil jedem Werte von $\varphi$ zwei reelle von null verschiedene Werte von $\rho$ entsprechen), welche symmetrisch in Bezug auf die Verbindungsgeraden der Zentren liegt (Fig. 2); man nennt deshalb diese Verbindungsgeraden die Achsen der Kurve. [1])

Im zweiten Falle ist das Erzeugnis ein Kreis mit Zentrum in $r_3$.

Satz 60: Das Erzeugnis zweier projektiven nicht perspektiven und nicht konlokalen resp. konzentrischen reellen Grundgebilde erster Stufe ist entweder eine geschlossene Kurve zweiter Ordnung mit drei Zentren oder ein Kreis; im ersten Falle bilden die drei Zentren der Kurve ein Oktant und die Kurve liegt in Bezug auf ihre Verbindungsgeraden symmetrisch.

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 164.

§ 62. Es ist (Satz 58)

$$\psi \Phi r_i = a r_i ;$$

wenn nun $r_i$ ein Zentrum ist, so folgt aus der letzten Gleichung

$$S_i \psi r_i = a r_i \text{ oder } \psi r_i = \frac{a}{S_i} r_i .$$

Satz 61: Ist $r_i$ eine Achse, so ist

$$\psi r_i = \frac{a}{S_i} r_i ,$$

wo a für jede Achse denselben Wert hat.

§ 63. Angenommen, wir haben vier Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Man fragt nach allen denjenigen Punkten r der Kugelfläche, für welche die Geraden $Vrr_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein gegebenes Doppelverhältnis g besitzen.

Alle solche Punkte und nur solche genügen der Gleichung (§ 1)

$$\frac{Vrr_1 vrr_3}{Vrr_3 vrr_2} : \frac{Vrr_1 vrr_4}{Vrr_4 vrr_2} = g$$

oder

(9). $$[r r_1 r_3] . [r r_2 r_4] - g [r r_1 r_4] . [r r_2 r_3] = 0.$$

Das ist nun die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes. Diesem geometrischen Ort gehören auch die Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ an, weil diese Punkte der letzten Gleichung genügen.

Der gefundene geometrische Ort ist eine Kurve zweiter Ordnung.

Liegen drei der Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, etwa $r_k$ $(k = 1, 2, 3)$, in einer Geraden, d. h. ist etwa $m r_3 = r_1 + n r_2$, so nimmt die Gleichung (9) die Form

$$[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]\,.\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1 + \tfrac{n}{g}\,\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_4] = 0$$

an. Wir haben also in diesem Falle zwei Gerade: $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ und $V(\mathfrak{r}_1 + \frac{n}{g}\,\mathfrak{r}_2)\,\mathfrak{r}_4$; die zweite Gerade ist die Verbindungsgerade des Punktes $\mathfrak{r}_4$ mit demjenigen Punkte der Geraden $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$, welcher mit den Punkten $\mathfrak{r}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ das Doppelverhältnis g besitzt (§ 7).

Liegen alle vier Punkte $\mathfrak{r}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ in einer Geraden, d. h. ist $m\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_1 + n\mathfrak{r}_2$ und $m'\mathfrak{r}_4 = \mathfrak{r}_1 + n'\mathfrak{r}_2$, so nimmt die Gleichung (9) die Form

$$\left(g - \tfrac{n}{n'}\right)[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2]^2 = 0$$

an. Wenn also $\frac{n}{n'} = g$ ist, so besteht der gefundene geometrische Ort aus zwei zusammenfallenden Geraden $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$; wenn aber $\frac{n}{n'} = g$ ist, mit anderen Worten wenn $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4) = g$ ist (§ 7), so genügt der Gleichung unseres geometrischen Ortes jeder Punkt der Kugelfläche. Das letzte ist auch aus dem Satze von Pappus (Satz 6) klar.

§ 64. Die Gleichung (9) (§ 63) können wir auch in der Form

$$\begin{vmatrix} [\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_3] & g[\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_4] \\ [\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3] & [\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_4] \end{vmatrix} = 0$$

schreiben, wir können also unsere Kurve als das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung

$$V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_3 + k\,g\,V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4 \text{ und } V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + k\,V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4$$

betrachten (§ 46).

Jetzt betrachten wir die Sache umgekehrt. Angenommen, wir haben das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung

$$\mathfrak{l}_1 + k\,\mathfrak{l}_2 \text{ und } \mathfrak{l}'_1 + k\,\mathfrak{l}'_2.$$

Nehmen wir vier beliebige Punkte dieses Erzeugnisses

$$r_i \equiv V\,(l_1 + k_i\,l_2)\,(l'_1 + k_i\,l'_2) \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Der geometrische Ort der Punkte r, für welche die Geraden $Vrr_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ das Doppelverhältnis

$$\frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2}$$

besitzen, ist (§ 63, Gl. (9))

$$[r\,r_1\,r_3] \cdot [r\,r_2\,r_4] - \frac{(k_3 - k_1)\,(k_4 - k_2)}{(k_3 - k_2)\,(k_4 - k_1)}\,[r\,r_1\,r_4] \cdot [r\,r_2\,r_3] = 0,$$

woraus sich nach einigen einfachen Reduktionen ergibt

$$r\,\Phi\,r = 0.$$

Satz 62: Den geometrischen Ort der Punkte, von welchen jeder mit den vier gegebenen Punkten $r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ verbunden die Geraden liefert, die das gegebene Doppelverhältnis g besitzen, können wir als das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordn. betrachten, und umgekehrt.

§ 65. Soll die Kurve (9) (§ 63) durch einen fünften Punkt $r_5$ hindurchgehen, so muss g der Gleichung

$$[r_5\,r_1\,r_3] \cdot [r_5\,r_2\,r_4] - g\,[r_5\,r_1\,r_4] \cdot [r_5\,r_2\,r_3] = 0$$

genügen. Es ist also

$$\begin{vmatrix} [r\,r_1\,r_3] \cdot [r\,r_2\,r_4] & [r\,r_1\,r_4] \cdot [r\,r_2\,r_3] \\ [r_5\,r_1\,r_3] \cdot [r_5\,r_2\,r_4] & [r_5\,r_1\,r_4] \cdot [r_5\,r_2\,r_3] \end{vmatrix} = 0$$

die einzige mögliche Kurve, welche durch die fünf Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ hindurchgeht und deren Punkte r der Bedingung

$$(Vrr_1\ Vrr_2\ Vrr_3\ Vrr_4) = \text{const.}$$

genügen. Weil aber solche Kurven identisch mit den Erzeugnissen projektiver Grundgebilde erster Stufe sind (Satz 62), so ist die letzte Kurve das einzige mögliche Erzeugnis, das durch diese fünf Punkte hindurchgeht.

Satz 63: Das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erst. Ordn. ist durch fünf Tangenten $l_i$ (i=1,2,3,4,5) vollkommen bestimmt; seine Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} [l_1l_3] & [l_1l_2l_4] & [l_1l_4] & [l_1l_2l_3] \\ [l_2l_1l_3] & [l_2l_2l_4] & [l_2l_1l_4] & [l_2l_2l_3] \end{vmatrix} = 0.$$

Satz 63′: Das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordn. ist durch fünf Punkte $r_i$ (i=1,2,3,4,5) vollkommen bestimmt; seine Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} [rr_1r_3] & [rr_2r_4] & [rr_1r_4] & [rr_2r_3] \\ [r_2r_1r_3] & [r_2r_2r_4] & [r_2r_1r_4] & [r_2r_2r_3] \end{vmatrix} = 0.$$

§ 66. Es seien gegeben sechs Punkte $r_i$ (i=1, 2, 3, 4, 5, 6). Verbinden wir diese Punkte der Reihe nach miteinander, so bekommen wir ein Sechseck. Liegen die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden, so ist

$$[Vvr_1r_2vr_4r_5\ Vvr_2r_3vr_5r_6\ Vvr_3r_4vr_6r_1] = 0,$$

und umgekehrt. Diese Gleichung nimmt aber nach einigen einfachen Reduktionen die Form

$$\begin{vmatrix} [r_6r_1r_3] \cdot [r_6r_2r_4] & [r_6r_1r_4] \cdot [r_6r_2r_3] \\ [r_5r_1r_3] \cdot [r_5r_2r_4] & [r_5r_1r_4] \cdot [r_5r_2r_3] \end{vmatrix} = 0$$

an, folglich gehört der Punkt $r_6$ dem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordn. an, welches durch die Punkte $r_i$ (i=1,2,3,4,5) bestimmt ist (Satz 63′).

Satz 64: Satz von Brianchon: Gehen die Verbindungsgeraden der gegen-

Satz 64′: Satz von Pascal: Liegen die Schnittpunkte der gegenüberlie-

überliegenden Ecken eines Sechsseits durch einen Punkt, so berühren alle sechs Seiten ein Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ordn., und umgekehrt.

genden Seiten eines Sechsecks in einer Geraden, so liegen alle sechs Eckpunkte auf einem Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erst. Ordn., und umgekehrt. [1])

§ 67. Denkt man sich das bisher als fest angenommene Doppelverhältnis g veränderlich, so stellt die Gleichung (9) (§ 63) den ganzen Büschel von den Kurven zweiter Ordnung dar, welche durch die vier Punkte $r_i$ (i=1, 2, 3, 4), die Grundpunkte des Büschels, hindurchgehen. Jedem Werte von g entspricht in diesem Büschel eine Kurve zweiter Ordnung. Den Werten $g = o$ und $g = \infty$ entsprechen die Kurven

$$[r\, r_1 r_3] \cdot [r\, r_2 r_4] = o \text{ und } [r\, r_1 r_4] \cdot [r\, r_2 r_3] = o,$$

dem Werte $g = 1$ die Kurve

$$[r\, r_1 r_3] \cdot [r\, r_2 r_4] - [r\, r_1 r_4] \cdot [r\, r_2 r_3] = o$$

oder

$$[Vr_3 r_4 \; Vr r_1 \; Vr r_2] = o$$

oder

$$[r\, r_1 r_2] \cdot [r\, r_3 r_4] = o.$$

Satz 65: Es ist

$$[ll_1 l_3] \cdot [ll_2 l_4] - g[ll_1 l_4] \cdot [ll_2 l_3] = o$$

bei veränderlichem g die Schar von den Kurven zweiter Klasse, welche

Satz 65′: Es ist

$$[rr_1 r_3] \cdot [rr_2 r_4] - g[rr_1 r_4] \cdot [rr_2 r_3] = o$$

bei veränderlichem g der Büschel von den Kurven zweiter Ordnung, welche

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 211.

die vier Geraden $l_i$ (i=1, 2, 3, 4) berühren; gehen drei von diesen Geraden durch einen Punkt, so besteht unsere Kurvenschar aus den degenerierten Kurven zweiter Klasse, von welchen jede diesen Punkt enthält; in jedem Falle aber gehören der Schar drei degenerierte Kurven zweiter Klasse an, nämlich diejenigen, welche den Parameterwerten $g = o, \infty, 1$ entsprechen; diese drei Punktpaare sind gerade die drei Paare Gegenecken des vollständigen Vierseits, welches die vier Geraden $l_i$ (i=1, 2, 3, 4) zu Seiten hat.

durch die vier Punkte $r_i$ (i=1, 2, 3, 4) hindurchgehen; liegen drei von diesen Punkten in einer Geraden, so besteht unser Kurvenbüschel aus den degenerierten Kurven zweiter Ordnung, von welchen jede diese Gerade enthält; in jedem Falle aber gehören dem Büschel drei degenerierte Kurven zweiter Ordnung an, nämlich diejenigen, welche den Parameterwerten $g = o, \infty, 1$ entsprechen; diese drei Geradenpaare sind gerade die drei Paare Gegenseiten des vollständigen Vierecks, welches die vier Punkte $r_i$ (i=1,2,3,4) zu Ecken hat.[1])

## VI. Projektive Grundgebilde zweiter Stufe.

§ 68. Das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordn. ist

$$V(l_1 + kl_2)(l'_1 + kl'_2)$$

Das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung ist

$$V(r_1 + kr_2)(r'_1 + kr'_2)$$

[1]) Vgl. H. Grassmann, Proj. Geom. d. Eb., Leipzig und Berlin (1909), S. 84.

oder

$$\mathfrak{R}_1 + k\,\mathfrak{R}_2 + k^2\,\mathfrak{R}_3$$

(wo $\mathfrak{R}_1 \equiv V l_1 l'_1$, $\mathfrak{R}_3 \equiv V l_2 l'_2$ und $\mathfrak{R}_2 \equiv V l_1 l'_2 + V l_2 l'_1$ ist).

Umgekehrt, $\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3$ können wir, wie auch die Vektoren $\mathfrak{R}_i$ (i=1, 2, 3) sein mögen, als das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel erster Ordnung

$$V(\mathfrak{R}_2 + k_j\mathfrak{R}_3)\mathfrak{R}_1 - kV(\mathfrak{R}_1 + k_j\mathfrak{R}_2)\mathfrak{R}_3$$

mit den Zentren $\mathfrak{R}_1 + k_j\mathfrak{R}_2 + k_j^2\mathfrak{R}_3$ (j=1, 2) betrachten.

Wir nennen

$$\mathfrak{R}_1 + k\,\mathfrak{R}_2 + k^2\,\mathfrak{R}_3$$

eine krumme Punktreihe oder eine Punktreihe zweiter Ordnung.

oder

$$\mathfrak{L}_1 + k\,\mathfrak{L}_2 + k^2\,\mathfrak{L}_3$$

(wo $\mathfrak{L}_1 \equiv V r_1 r'_1$, $\mathfrak{L}_3 \equiv V r_2 r'_2$ und $\mathfrak{L}_2 \equiv V r_1 r'_2 + V r_2 r'_1$ ist).

Umgekehrt, $\mathfrak{L}_1 + k\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_3$ können wir, wie auch die Vektoren $\mathfrak{L}_i$ (i=1, 2, 3) sein mögen, als das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen erster Ordnung

$$V(\mathfrak{L}_2 + k_j\mathfrak{L}_3)\mathfrak{L}_1 - kV(\mathfrak{L}_1 + k_j\mathfrak{L}_2)\mathfrak{L}_3$$

mit den Trägern $\mathfrak{L}_1 + k_j\mathfrak{L}_2 + k_j^2\mathfrak{L}_3$ (j=1, 2) betrachten.

Wir nennen

$$\mathfrak{L}_1 + k\,\mathfrak{L}_2 + k^2\,\mathfrak{L}_3$$

einen krummen Strahlenbüschel oder einen Strahlenbüschel zweiter Ordn.

Die Punktreihen und Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind die Grundgebilde zweiter Stufe der projektiven Geometrie der Kugelfläche.

Definition: Zwei Grundgebilde zweiter resp. erster und zweiter Stufe sind projektiv, wenn die Grundgebilde erster Stufe es sind, welche man bekommt, wenn man jedes Grundgebilde zweiter Stufe durch ein Grundgebilde erster Stufe in der Weise ersetzt, dass man statt einer Punktreihe zweiter Ordnung einen Strahlenbüschel erster Ordnung nimmt, welcher durch die Projektion der Punktreihe aus

irgend einem ihrer Punkte entsteht, und statt eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung eine Punktreihe erster Ordnung nimmt, welche der Strahlenbüschel aus irgend einem seiner Strahlen ausschneidet.

Aus dieser Definition folgt direkt

Satz 66: Die Sätze 12 und 20 gelten auch im Falle projektiver Grundgebilde zweiter resp. erster und zweiter Stufe (in dem Satze 12 muss man nur hinzufügen: wenn die Träger der in Betracht kommenden Grundgebilde zweiter Stufe gegeben sind).

§ 69. Projeziert man jede von zwei projektiven Punktreihen zweiter Ordnung zuerst aus einem Punkte ihres Trägers und dann aus einem anderen, so bekommt man zwei Paare projektiver Strahlenbüschel erster Ordnung (§ 68, Def.):

$$\mathfrak{l}_1+k\mathfrak{l}_2 \text{ und } \mathfrak{l}''_1+k\mathfrak{l}''_2,\ \mathfrak{l}'_1+k\mathfrak{l}'_2 \text{ und } \mathfrak{l}'''_1+k\mathfrak{l}'''_2.$$

Waren hier die Vektoren $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}'_1$ und $\mathfrak{l}'_2$ so gewählt, dass die Strahlen $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}'_1$, $\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}'_2$, $\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}_2$ und $\mathfrak{l}'_1+\mathfrak{l}'_2$ dieselben Punkte projezieren, so können die beiden projektiven Punktreihen zweiter Ordnung in der Form

$$V(\mathfrak{l}_1+k\mathfrak{l}_2)\,(\mathfrak{l}'_1+k\mathfrak{l}'_2) \text{ und } V(\mathfrak{l}''_1+k\mathfrak{l}''_2)\,(\mathfrak{l}'''_1+k\mathfrak{l}'''_2)$$

oder

$$\mathfrak{R}_1+k\,\mathfrak{R}_2+k^2\,\mathfrak{R}_3 \text{ und } \mathfrak{R}'_1+k\,\mathfrak{R}'_2+k^2\,\mathfrak{R}'_3$$

dargestellt werden, wo für jeden Wert von k beide letzte Vektoren zwei entsprechende Elemente repräsentieren.

Satz 67: Projektive Grundgebilde erster und zweiter Stufe können in der Form

$$\mathfrak{r}_1+k\,\mathfrak{r}_2 \text{ und } \mathfrak{R}_1+k\,\mathfrak{R}_2+k^2\,\mathfrak{R}_3$$

und projektive Grundgebilde zweiter Stufe in der Form

$\mathfrak{R}_1 + k\,\mathfrak{R}_2 + k^2\,\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}'_1 + k\,\mathfrak{R}'_2 + k^2\,\mathfrak{R}'_3$

dargestellt werden, wo für jeden Wert von k beide diese Vektoren zwei entsprechende Elemente repräsentieren.

Zwei projektive konlokale Punktreihen zweiter Ordnung kann man in der Form

(1). $V(l_1 + k\,l_2)(l'_1 + k l'_2)$ und

$$V\left(l_1 + \frac{\alpha_{12} + k\,\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\,\alpha_{21}}\,l_2\right)\left(l'_1 + \frac{\alpha'_{12} + k\,\alpha'_{22}}{\alpha'_{11} + k\,\alpha'_{21}}\,l'_2\right)$$

darstellen. Es muss aber für jeden Wert von k

$$\left(l_1\,l_2\,l_1 + l_2\,l_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\,l_2\right) =$$

$$= \left(l'_1\,l'_2\,l'_1 + l'_2\,l'_1 + \frac{\alpha'_{12} + k\alpha'_{22}}{\alpha'_{11} + k\alpha'_{21}}\,l'_2\right)$$

sein (Satz 62), woraus folgt (§ 7)

$$\frac{\alpha_{12} + k\,\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\,\alpha_{21}} = \frac{\alpha'_{12} + k\,\alpha'_{22}}{\alpha'_{11} + k\,\alpha'_{21}}.$$

Wenn wir das in (1) einsetzen, so bekommen wir

$$\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3 \text{ und } \mathfrak{R}_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\,\mathfrak{R}_2 + \left(\frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\right)^2 \mathfrak{R}_3.$$

Satz 68: Zwei projektive konlokale Grundgebilde zweiter Stufe können entweder in der Form

$$\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3 \text{ und } \mathfrak{R}_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\,\mathfrak{R}_2 + \left(\frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\right)^2 \mathfrak{R}_3$$

oder in der Form

$$\mathfrak{R}_1 - \frac{\alpha_{12}-\lambda\alpha_{11}}{\alpha_{22}-\lambda\alpha_{21}}\mathfrak{R}_2 + \left(\frac{\alpha_{12}-\lambda\alpha_{11}}{\alpha_{22}-\lambda\alpha_{21}}\right)^2 \mathfrak{R}_3 \text{ und } \mathfrak{R}_1 + \lambda\mathfrak{R}_2 + \lambda^2\mathfrak{R}_3$$

dargestellt werden.

§ 70. Projeziert man zwei projektive konlokale Punktreihen zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte des gemeinsamen Trägers, so bekommt man zwei projektive konzentrische Strahlenbüschel erster Ordnung. Sind diese Strahlenbüschel gleichsinnig, so sind es auch unsere Punktreihen, besitzen diese Strahlenbüschel reelle Doppelelemente, so tun es auch unsere Punktreihen, u. s. w.

Satz 69: Die Sätze 30, 32, 33 und 34 gelten auch im Falle zweier projektiven konlokalen Grundgebilde zweiter Stufe.

§ 71. Seien $\mathfrak{R}_m$ und $\mathfrak{R}'_m$, $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}'_n$ zwei Paare entsprechender Punkte zweier projektiven konlokalen Punktreihen zweiter Ordnung und entspreche das erste Paar dem Werte $k_1$, das zweite Paar dem Werte $k_2$. Es ist nun

$$\frac{(\alpha_{11}+k_1\alpha_{21})^2}{(k_2-k_1)\,[\alpha_{12}+k_1\alpha_{22}-k_2(\alpha_{11}+k_1\alpha_{21})]}\,V\mathfrak{R}_n\mathfrak{R}'_m -$$

$$-\frac{(\alpha_{11}+k_2\alpha_{21})^2}{(k_2-k_1)\,[\alpha_{12}+k_2\alpha_{22}-k_1(\alpha_{11}+k_2\alpha_{21})]}\,V\mathfrak{R}_m\mathfrak{R}'_n$$

$$= \alpha_{12}\mathfrak{L}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\mathfrak{L}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{L}_3 \text{ [1]}$$

eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der Geraden $V\mathfrak{R}_m\mathfrak{R}'_n$ und $V\mathfrak{R}_n\mathfrak{R}'_m$ hindurchgeht; sie ist von den Parameterwerten $k_i$ $(i=1, 2)$ ganz unabhängig.

[1]) Wir bezeichnen $V\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{L}_1$ u. s. w.; ebenso $V\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_3 = \mathfrak{R}_1$ u. s. w.

Satz 70: Sind $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{R}'_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots$) die entsprechenden Punkte zweier projektiven konlokalen Punktreihen zweiter Ordnung, so liegen die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $V\mathfrak{R}_m\mathfrak{R}'_n$ und $V\mathfrak{R}_n\mathfrak{R}'_m$ in ein und derselben Geraden $\alpha_{12}\mathfrak{L}_1 - (\alpha_{11} - \alpha_{22})\mathfrak{L}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{L}_3$, welche wir die Projektivitätsachse der beiden Punktreihen nennen.

Satz 70′: Sind $\mathfrak{L}_i$ und $\mathfrak{L}'_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots$) die entsprechenden Strahlen zweier projektiven konlokalen Strahlenbüschel zweiter Ordn., so gehen die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $V\mathfrak{L}_m\mathfrak{L}'_n$ und $V\mathfrak{L}_n\mathfrak{L}'_m$ durch ein und denselben Punkt $\alpha_{12}\mathfrak{R}_1 - (\alpha_{11} - \alpha_{22})\mathfrak{R}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{R}_3$, welchen wir das Projektivitätszentrum der beiden Strahlenbüschel nennen. [1])

§ 72. Die Werte von k, welche den Schnittpunkten der Projektivitätsachse mit dem gemeinsamen Träger der beiden projektiven konlokalen Punktreihen zweiter Ordnung angehören, bestimmt man aus der Gleichung

$$(\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3)\,[\alpha_{12}\mathfrak{L}_1 - (\alpha_{11} - \alpha_{22})\mathfrak{L}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{L}_3] = 0$$

oder

$$\alpha_{21}k^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})k - \alpha_{12} = 0.$$

Das ist aber genau die Gleichung für die Bestimmung der k's der Doppelelemente.

Satz 71: Die Projektivitätsachse zweier projektiven konlokalen Punktreihen zweiter Ordnung schneidet den gemeinsamen Träger der beiden

Satz 71′: Die Tangenten aus dem Projektivitätszentrum zweier projektiven konlokalen Strahlenbüschel zweiter Ordnung zu dem gemeinsamen Träger

[1]) Vgl. M.-Fr. Daniëls. Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 228.

Punktreihen in den beiden Doppelpunkten der Projektivität.

der beiden Strahlenbüschel gezogen sind die beiden Doppelstrahlen der Projektivität. [1])

§ 73. Die unendlich benachbarten Punkte

$$\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3 \text{ und } \mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3 + (\mathfrak{R}_2 + 2k\,\mathfrak{R}_3)\,dk$$

einer Punktreihe zweiter Ordnung bestimmen die Tangente

$$V(\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3)\,(\mathfrak{R}_2 + 2k\mathfrak{R}_3) \equiv \mathfrak{L}_3 - 2k\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_1$$

zu dem Träger der Punktreihe.

Satz 72: Die Tangenten in allen Punkten einer Punktreihe zweiter Ordnung

$$\mathfrak{R}_1 + k\,\mathfrak{R}_2 + k^2\,\mathfrak{R}_3$$

zu dem Träger der Punktreihe bilden einen zu dieser Punktreihe projektiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$\mathfrak{L}_3 - 2k\,\mathfrak{L}_2 + k^2\,\mathfrak{L}_1.$$

Satz 72': Die Berührungspunkte aller Strahlen eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung

$$\mathfrak{L}_1 + k\,\mathfrak{L}_2 + k^2\,\mathfrak{L}_3$$

mit dem Träger des Strahlenbüschels bilden eine zu diesem Strahlenbüschel projektive Punktreihe zweiter Ordnung

$$\mathfrak{R}_3 - 2k\,\mathfrak{R}_2 + k^2\,\mathfrak{R}_1.$$ [2])

§ 74. Sind zwei projektive konlokale Punktreihen zweiter Ordnung

$$\mathfrak{R}_1 + k\mathfrak{R}_2 + k^2\mathfrak{R}_3 \text{ und } \mathfrak{R}_1 + \frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\mathfrak{R}_2 + \left(\frac{\alpha_{12} + k\alpha_{22}}{\alpha_{11} + k\alpha_{21}}\right)^2 \mathfrak{R}_3$$

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls. Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 229.

[2]) Vgl. M.—Fr. Daniëls. Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 226.

gegeben, so sind dadurch auch zwei projektive konlokale Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$\mathfrak{L}_3 - 2k\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_1 \text{ und } \mathfrak{L}_3 - 2\,\frac{\alpha_{12}+k\alpha_{22}}{\alpha_{11}+k\alpha_{21}}\,\mathfrak{L}_2 + \left(\frac{\alpha_{12}+k\alpha_{22}}{\alpha_{11}+k\alpha_{21}}\right)^2\mathfrak{L}_1$$

bestimmt (Satz 72). Das Projektivitätszentrum dieser beiden Strahlenbüschel ist (Satz 70')

$$-2\,\alpha_{12}V\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\,V\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_3 + 2\,\alpha_{21}V\mathfrak{L}_3\mathfrak{L}_2$$

oder nach Division durch $-[\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3]$

$$2\,\alpha_{21}\,\mathfrak{R}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\,\mathfrak{R}_2 - 2\,\alpha_{12}\,\mathfrak{R}_3.$$

Satz 73: Durch eine krumme Punktprojektivität ist die Projektivitätsachse

$$\alpha_{12}\mathfrak{L}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\mathfrak{L}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{L}_3$$

und das Projektivitätszentrum

$$2\alpha_{21}\mathfrak{R}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\mathfrak{R}_2 - 2\alpha_{12}\mathfrak{R}_3$$

bestimmt.

Satz 73': Durch eine krumme Strahlenprojektivität ist das Projektivitätszentrum

$$\alpha_{12}\mathfrak{R}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\mathfrak{R}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{R}_3$$

und die Projektivitätsachse

$$2\alpha_{21}\mathfrak{L}_1 - (\alpha_{11}-\alpha_{22})\mathfrak{L}_2 - 2\alpha_{12}\mathfrak{L}_3$$

bestimmt.

§ 75. Genau so, wie wir im Falle der konlokalen resp. konzentrischen Grundgebilde erster Stufe über die Involution gesprochen haben, können wir es auch jetzt tun, wenn es sich um die konlokalen Grundgebilde zweiter Stufe handelt.

Satz 74: Die Sätze 37, 38, 39, 41 und 42 gelten auch im Falle zweier konlokalen Grundgebilde zweiter Stufe.

§ 76. Die Projektivitätsachse und das Projektivitätszentrum werden im Falle einer krummen In-

volution die Involutionsachse und das Involutionszentrum genannt.

Mit Rücksicht auf die Sätze 73, 73′, 37 und 74 können wir folgende Sätze formulieren:

Satz 75: Durch eine krumme Punktinvolution ist die Involutionsachse

$$\alpha_{12}\mathfrak{L}_1 - 2\,\alpha_{11}\mathfrak{L}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{L}_3$$

und das Involutionszentrum

$$\alpha_{21}\mathfrak{R}_1 - \alpha_{11}\mathfrak{R}_2 - \alpha_{12}\mathfrak{R}_3$$

bestimmt.

Satz 75′: Durch eine krumme Strahleninvolution ist das Involutionszentrum

$$\alpha_{12}\mathfrak{R}_1 - 2\,\alpha_{11}\mathfrak{R}_2 - \alpha_{21}\mathfrak{R}_3$$

und die Involutionsachse

$$\alpha_{21}\mathfrak{L}_1 - \alpha_{11}\mathfrak{L}_2 - \alpha_{12}\mathfrak{L}_3$$

bestimmt.

Weil nun

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & -\alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & \dfrac{\alpha_{12}-k\,\alpha_{11}}{\alpha_{11}+k\,\alpha_{21}} & \left(\dfrac{\alpha_{12}-k\,\alpha_{11}}{\alpha_{11}+k\,\alpha_{21}}\right)^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ und}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & -2\,\alpha_{11} & -\alpha_{21} \\ k^2 & -2k & 1 \\ \left(\dfrac{\alpha_{12}-k\,\alpha_{11}}{\alpha_{11}+k\,\alpha_{21}}\right)^2 & -2\,\dfrac{\alpha_{12}-k\,\alpha_{11}}{\alpha_{11}+k\,\alpha_{21}} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist, so haben wir

Satz 76: Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte einer krummen Involution gehen durch ihr Involutionszentrum und die Schnittpunkte der entsprechenden Tangenten liegen in ihrer Involutionsachse [1]).

[1]) Vgl. M.—Fr. Daniëls, Essai de géom. sph., Fribourg (1907), S. 231.

§ 77. Ist ein Erzeugnis zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe gegeben, so ist jedem Punkte P resp. jeder Geraden p eine und nur eine derartige krumme Punktinvolution, deren Träger das gegebene Erzeugnis und deren Zentrum der Punkt P resp. deren Achse die Gerade p ist, zugeordnet. Denn haben wir etwa einen Punkt P, so bringen wir durch ihn zwei Gerade, welche das Erzeugnis in den Punkten A, A′ und B, B′ schneiden; die durch die Paare A, A′ und B, B′ bestimmte Involution ist die gesuchte (Satz 76); weil aber jede Involution, für welche P das Zentrum ist, mit der gefundenen Involution die Paare A, A′ und B, B′ gemein hat, so fällt sie mit der gefundenen Involution identisch zusammen, es ist also jedem Punkte nur eine Involution zugeordnet.

Wir stellen jetzt folgende Definitionen auf:

1°. Die Gerade, welche dieselbe krumme Punktinvolution erzeugt, wie der Punkt P, heisst die Polare des Punktes P in Bezug auf das gegebene Erzeugnis.

2°. Der Punkt, welcher dieselbe krumme Punktinvolution erzeugt, wie die Gerade p, heisst der Pol der Geraden p in Bezug auf das gegebene Erzeugnis.

Aus diesen Definitionen ergibt sich sofort

Satz 77: Der Punkt P ist der Pol der Geraden p, wenn p die Polare von P ist, und umgekehrt.

Satz 78: Die Involutionsachse ist die Polare des Involutionszentrums und das Involutionszentrum ist der Pol der Involutionsachse [1]).

§ 78. Wir wollen jetzt den Vektor der Polare eines Punktes $r_0$ suchen.

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 97

Ziehen wir durch den Punkt $r_0$ zwei beliebige Sekanten, welche mit dem Erzeugnis die Schnittpunkte

$$r_1,\ r_0 + m\ r_1 \text{ und } r_2,\ r_0 + n\ r_2$$

liefern; diese Punkte bilden zwei Paare entsprechender Punkte der dem Punkte $r_0$ zugeordneten Punktinvolution. Die Polare von $r_0$ ist also (Sätze 78, 76, 54′ u. 51′)

$$V V \Phi(r_0 + m r_1)\Phi r_1\, V\Phi(r_0 + n r_2)\Phi r_2 \equiv V V \Phi r_0 \Phi r_1\, V\Phi r_0 \Phi r_2$$

oder, unabhängig von einem Zahlenfaktor,

$$\Phi r_0.$$

Wir sind auf denselben Vektor gekommen wie früher, bei der alten Auffassung der Polare (Satz 51′).

Ebenso können wir finden, dass $\Psi l_0$ der Vektor des Poles der Geraden $l_0$ ist.

---

## VII. Koniugierte und fokale Involutionen.

§ 79. Zwei Gerade heissen hinsichtlich eines Erzeugnisses zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe koniugiert, wenn die eine durch den Pol der anderen hindurchgeht.

Zwei Punkte heissen hinsichtlich eines Erzeugnisses zweier projektiven Grundgebilde erster Stufe koniugiert, wenn der eine in der Polare des anderen liegt.

Hieraus ergibt sich direkt

Satz 79: Sind zwei Gerade einer dritten koniugiert, so ist ihr Schnitt-

Satz 79′: Sind zwei Punkte einem dritten koniugiert, so ist ihre Verbin-

punkt der Pol der dritten Geraden.

dungsgerade die Polare des dritten Punktes [1]).

§ 80. Betrachten wir k als veränderlich, so repräsentiert der Vektor

$$r_1 + kr_2$$

alle Punkte der Geraden $Vr_1r_2$ und der Vektor

$$V\Phi(r_1+kr_2)Vr_1r_2 \equiv (r_1+kr_2)\Phi r_2.r_1 - (r_1+kr_2)\Phi r_1.r_2$$

alle ihnen koniugierten Punkte derselben Geraden. Diese Punkte bilden zwei projektive konlokale Punktreihen

$$r_1 + kr_2 \text{ und } r_1 - \frac{(r_1+kr_2)\Phi r_1}{(r_1+kr_2)\Phi r_2}\, r_2.$$

Es ist aber

$$\alpha_{11} = r_1\Phi r_2 = -\alpha_{22},$$

folglich sind unsere Punktreihen involutorisch (Satz 37).

Satz 80: Die koniugierten Geraden, die durch einen Punkt gehen, sind Strahlenpaare der Involution

$$l_1+kl_2 \text{ und } l_1 - \frac{(l_1+kl_2)\Psi l_1}{(l_1+kl_2)\Psi l_2} l_2,$$

wo $l_1$ und $l_2$ zwei beliebige voneinander verschiedene Gerade durch diesen Punkt sind; diese Involution heisst die koniugierte Strahleninvolution des Punktes.

Satz 80′: Die koniugierten Punkte, die in einer Geraden liegen, sind Punktpaare der Involution

$$r_1+kr_2 \text{ und } r_1 - \frac{(r_1+kr_2)\Phi r_1}{(r_1+kr_2)\Phi r_2} r_2,$$

wo $r_1$ und $r_2$ zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte dieser Geraden sind; diese Involution heisst die koniugierte Punktinvolution der Geraden [1]).

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 104.

§ 81. Sind $r_i$ ($i = 1, 2$) zwei beliebige Punkte einer Geraden, so gehen $\Phi r_i$ ($i = 1, 2$) durch den Pol dieser Geraden, wir können also die koniugierte Involution des Poles in der Form (Satz 80)

$$\Phi r_1 + k\Phi r_2 \text{ und } \Phi r_1 - \frac{(\Phi r_1 + k\Phi r_2)\,\dot{\psi}\Phi r_1}{(\Phi r_1 + k\Phi r_2)\,\dot{\psi}\Phi r_2}\,\Phi r_2$$

oder (Satz 58)

$$\Phi r_1 + k\Phi r_2 \text{ und } \Phi r_1 - \frac{(r_1 + kr_2)\,\Phi r_1}{(r_1 + kr_2)\,\Phi r_2}\,\Phi r_2$$

darstellen.

Satz 81: Sind $l_1$ und $l_2$ zwei beliebige voneinander verschiedene Gerade durch einen Punkt, so ist

$$\dot{\psi}l_1 + k\dot{\psi}l_2 \text{ und } \dot{\psi}l_1 - \frac{(l_1 + kl_2)\dot{\psi}l_1}{(l_1 + kl_2)\dot{\psi}l_2}\,\dot{\psi}l_2$$

die koniugierte Punktinvolution der Polare dieses Punktes.

Satz 81′: Sind $r_1$ und $r_2$ zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte einer Geraden, so ist

$$\Phi r_1 + k\Phi r_2 \text{ und } \Phi r_1 - \frac{(r_1 + kr_2)\,\Phi r_1}{(r_1 + kr_2)\,\Phi r_2}\,\Phi r_2$$

die koniugierte Strahleninvolution des Poles dieser Geraden.

§ 82. Es ist

$$(r_1 + kr_2)\left[\Phi r_1 - \frac{(r_1 + kr_2)\Phi r_1}{(r_1 + kr_2)\Phi r_2}\,\Phi r_2\right] =$$

$$= (\Phi r_1 + k\Phi r_2)\left[r_1 - \frac{(r_1 + kr_2)\Phi r_1}{(r_1 + kr_2)\Phi r_2}\,r_2\right] = 0,$$

folglich (Sätze 80′ u. 81′)

Satz 82: Die koniugierte Involution eines Punktes resp. einer Geraden liegt perspektiv zu der koniugierten Involution seiner Polare resp. ihres Poles [1]).

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 104.

§ 83. Einen Punkt resp. eine Gerade, dessen resp. deren koniugierte Involution elliptisch, hyperbolisch, parabolisch ist, nennen wir elliptisch, hyperbolisch, parabolisch.

Der Ausdruck für die Entscheidung der Art einer Geraden ist (Sätze 80′ u. 32)

$$(r_1\Phi r_2)^2 - r_1\Phi r_1 \,.\, r_2\Phi r_2 \text{ oder } - Vr_1r_2V\Phi r_1\Phi r_2.$$

Satz 83: Ein Punkt ist hyperbolisch, parabolisch, elliptisch, je nachdem für zwei beliebige voneinander verschiedene Gerade $l_1$ und $l_2$ durch diesen Punkt

$$Vl_1l_2V\Phi l_1\Phi l_2 \lessgtr o, = o, > o$$

ist.

Satz 83′: Eine Gerade ist hyperbolisch, parabolisch, elliptisch, je nachdem für zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte $r_1$ und $r_2$ dieser Geraden

$$Vr_1r_2V\Phi r_1\Phi r_2 \lessgtr o, = o, > o$$

ist.

§ 84. Es ist

$$- Vr_1r_2V\Phi r_1\Phi r_2 \equiv (r_1\Phi r_2)^2 - r_1\Phi r_1 \,.\, r_2\Phi r_2$$

die Diskriminante der Gleichung

$$(r_1 + xr_2)\,\Phi\,(r_1 + xr_2) = o,$$

also (Satz 83′)

Satz 84: Durch einen hyperbolischen Punkt gehen zwei reelle voneinander verschiedene Tangenten zu der Kurve, durch einen parabolischen zwei reelle zusammenfallende (er ist ein Kurvenpunkt), durch einen elliptischen zwei imaginäre.

Satz 84′: Eine hyperbolische Gerade hat zwei reelle voneinander verschiedene Punkte mit der Kurve gemein, eine parabolische zwei reelle zusammenfallende (sie ist eine Tangente), eine elliptische zwei imaginäre. [1])

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 122.

§ 85. Der Ausdruck für die Entscheidung der Art des Poles der Geraden $Vr_1r_2$ ist (Sätze 81′ u. 32)

$$(r_1\Phi r_2)^2 - r_1\Phi r_1 \,.\, r_2\Phi r_2 = -Vr_1r_2V\Phi r_1\Phi r_2,$$

also (Satz 83′)

Satz 85: Jeder Punkt hat eine gleichnamige Polare.

Satz 85′: Jede Gerade hat einen gleichnamigen Pol.[1])

§ 86. Wollen wir die Tangenten finden, welche man im Falle einer krummen Involution aus dem Involutionszentrum zu dem Träger ziehen kann, so brauchen wir nur die Gleichung (Sätze 72 u. 75)

$$(\alpha_{21}\mathfrak{R}_1 - \alpha_{11}\mathfrak{R}_2 - \alpha_{12}\mathfrak{R}_3)\,(\mathfrak{L}_3 - 2\,k\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_1) = 0$$

oder

$$\alpha_{21}\,k^2 + 2\alpha_{11}\,k - \alpha_{12} = 0$$

in Bezug auf k zu lösen. Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21},$$

folglich (Sätze 84, 69, 32, 74 u. 37):

Satz 86: Das Zentrum einer krummen Involution ist ein der Involution gleichnamiger Punkt.

Satz 86′: Die Achse einer krummen Involution ist eine der Involution gleichnamige Gerade.[1])

§ 87. Es sei gegeben eine elliptische Gerade l. Dann gilt die Ungleichung (Satz 84′)

(1). $$(\mathfrak{R}_2l)^2 - 4\,\mathfrak{R}_1l\,.\,\mathfrak{R}_3l < 0.$$

Es ist

$$l = mVr\left(\mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{R}_1l}{\mathfrak{R}_3l}\,\mathfrak{R}_3\right),$$

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 123.

wo r ein beliebiger nicht mit $\mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\mathfrak{R}_3$ zusammenfallender Punkt von l ist. Wenn wir diesen Ausdruck in (1) einsetzen, so bekommen wir

$$\left(\mathfrak{L}_3 r + \frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\cdot \mathfrak{L}_1 r\right)^2 - 4\,\frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\,(\mathfrak{L}_2 r)^2 < 0$$

oder

$$\left(\mathfrak{L}_3 r - \frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\cdot \mathfrak{L}_1 r\right)^2 - 4\,\frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\,[(\mathfrak{L}_2 r)^2 - \mathfrak{L}_1 r.\,\mathfrak{L}_3 r] < 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\,[(\mathfrak{L}_2 r)^2 - \mathfrak{L}_1 r.\,\mathfrak{L}_3 r] > 0$$

oder, mit Rücksicht auf (1),

$$(\mathfrak{L}_3 r)^2 - \mathfrak{L}_1 r.\,\mathfrak{L}_3 r > 0.$$

Diese Ungleichung lehrt uns, dass der Punkt r hyperbolisch ist (Sätze 72 u. 84).

Dass der Punkt $\mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\mathfrak{R}_3$ der Geraden l auch hyperbolisch ist können wir daraus schliessen, dass die Gleichung

$$(\mathfrak{L}_3 - 2\,k\,\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_1)\left(\mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l}\,\mathfrak{R}_3\right) = 0$$

oder

$$k^2 - \frac{\mathfrak{R}_1 l}{\mathfrak{R}_3 l} = 0$$

zwei reelle Wurzeln besitzt.

Satz 87: Alle Strahlen eines elliptischen Punktes sind hyperbolisch.

Satz 87′: Alle Punkte einer elliptischen Geraden sind hyperbolisch.[1])

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 124.

Angenommen, wir haben eine hyperbolische Gerade. Sie liefert mit der Kurve zwei reelle Schnittpunkte

$$r_1 = \mathfrak{R}_1 + k_1\mathfrak{R}_2 + k_1^2\mathfrak{R}_3 \text{ und } r_2 = \mathfrak{R}_1 + k_2\mathfrak{R}_2 + k_2^2\mathfrak{R}_3.$$

Die Diskriminante der Gleichung

$$(\mathfrak{L}_3 - 2k\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_1)(r_1 + k'r_2) = 0 \text{ oder } (\mathfrak{L}_3 - 2k\mathfrak{L}_2 + k^2\mathfrak{L}_1)\left(\tfrac{1}{k'}r_1 + r_2\right) = 0$$

ist

$$-k'(k_1 - k_2)^2 \text{ oder } -\tfrac{1}{k'}(k_1 - k_2)^2.$$

Das Zeichen dieser Diskriminante hängt also nur von dem Zeichen von k' ab. Für $k' = 0, \infty$ ist die Diskriminante gleich null.

Satz 88: Jeder hyperbolische Punkt besitzt unendlich viele hyperbolische Strahlen, unendlich viele elliptische und zwei parabolische, nämlich die beiden Tangenten zu der Kurve.

Satz 88′: Jede hyperbolische Gerade besitzt unendlich viele hyperbolische Punkte, unendlich viele elliptische und zwei parabolische, nämlich die beiden Schnittpunkte mit der Kurve.

§ 88. Angenommen, wir haben eine parabolische Gerade $\mathfrak{l}$, d. h. eine Tangente. Nehmen wir einen beliebigen Punkt r dieser Geraden und durch diesen eine beliebige von $\mathfrak{l}$ verschiedene Gerade $\mathfrak{l}_1$. Der Ausdruck für die Entscheidung der Art des Punktes r ist also (Satz 83)

$$V\mathfrak{l}_1 V\dot{\psi}\mathfrak{l}\dot{\psi}\mathfrak{l}_1 = -(\mathfrak{l}_1\dot{\psi}\mathfrak{l})^2.$$

Dieser Ausdruck ist immer negativ und nur dann ist er null, wenn $\mathfrak{l}_1$ durch $\dot{\psi}\mathfrak{l}$, d. h. durch den Berührungspunkt von $\mathfrak{l}$, hindurchgeht, dann fällt aber r mit $\dot{\psi}\mathfrak{l}$ zusammen.

Satz 89: Jeder Strahl eines parabolischen Punktes ist hyperbolisch, mit Ausnahme der Tangente, welche parabolisch ist.

Satz 89′: Jeder Punkt einer parabolischen Geraden ist hyperbolisch, mit Ausnahme des Berührungspunktes, welcher parabolisch ist.

§ 89. Drei voneinander verschiedene Punkte $r_i$ $(i = 1, 2, 3)$ derart, dass je zwei von ihnen in der Polare des dritten Punktes liegen, bilden ein sg. Poldreieck.

Um ein Poldreieck zu bekommen, nehmen wir einen Eckpunkt $r_1$ beliebig, dann nehmen wir den zweiten Eckpunkt $r_2$ beliebig in der Polare des ersten, d. h. in $\Phi r_1$; der dritte Eckpunkt $r_3$ wird dann $V\Phi r_1 \Phi r_2$ sein.

Ist es möglich, dass eine Ecke eines Poldreiecks parabolisch ist? Nein, denn sei etwa $r_1$ parabolisch, so ist $\Phi r_1$ die Tangente daselbst (Sätze 84 u. 54′), die Polare jedes Punktes von $\Phi r_1$ geht durch $r_1$ hindurch (Satz 52′), es ist also $V\Phi r_1 \Phi r_2 = m r_1$, d. h. der Punkt $r_3$ fällt mit $r_1$ zusammen, wir haben hier also eigentlich kein Dreieck.

Angenommen, es sei ein Poldreieck mit den Ecken $r_i$ $(i = 1, 2, 3)$ gegeben.

Ist $r_1$ elliptisch, dann ist es auch $\Phi r_1$ (Satz 85), folglich sind $r_2$ und $r_3$ hyperbolisch (Satz 87′).

Ist $r_1$ hyperbolisch, so kann $r_2$ entweder elliptisch oder hyperbolisch sein; wenn $r_2$ elliptisch ist, so ist $r_3$ hyperbolisch; wenn dagegen $r_2$ auch hyperbolisch ist, so haben wir (Sätze 85 u. 83′)

$$Vr_2 r_3 V\Phi r_2 \Phi r_3 < o \text{ und } Vr_3 r_1 V\Phi r_3 \Phi r_1 < o$$

oder

$$r_2 \Phi r_2 . r_3 \Phi r_3 < o \text{ und } r_1 \Phi r_1 . r_3 \Phi r_3 < o,$$

woraus folgt

$$r_1\Phi r_1 \,.\, r_2\Phi r_2 > 0 \text{ oder } Vr_1r_2V\Phi r_1\Phi r_2 > 0,$$

also ist $\Phi r_3$, folglich auch $r_3$, elliptisch.

Satz 90: Von den drei Ecken eines Poldreiecks ist eine Ecke elliptisch, die beiden anderen sind hyperbolisch; dasselbe gilt für die Seiten.[1])

§ 90. Drei ein Oktant bildende Zentren eines Erzeugnisses zweier projektiven (n. persp. u. n. konl. resp. konz.) Grundgebilde erster Stufe bilden ein Poldreieck, folglich ist ein Zentrum elliptisch, die beiden anderen sind hyperbolisch. Bezeichnen wir diese drei Zentren mit $r_u$, $r_v$ und $r_w$. Der Ausdruck für die Entscheidung der Art der Geraden $Vr_ur_v$, also auch des Punktes $r_w$, ist

$$Vr_ur_vV\Phi r_u\Phi r_v = S_uS_vr_u^2r_v^2.$$

Wenn also $S_u$ und $S_v$ gleiche Zeichen haben, so ist $r_w$ elliptisch, wenn dagegen verschiedene, so ist $r_w$ hyperbolisch. Weil nun $S_1$ und $S_2$ der Voraussetzung nach gleiche Zeichen besitzen (§ 61), so ist $r_3$ elliptisch, dagegen sind $r_1$ und $r_2$ hyperbolisch.

Satz 91: Von den Zentren eines Erzeugnisses zweier projektiven (n. persp. u. n. konl. resp. konz.) Grundgebilde erster Stufe ist $r_3$ elliptisch, alle anderen sind hyperbolisch.

Die Gerade $Vr_ur_v$ geht durch den Pol $r_v$ der Geraden $Vr_ur_w$, also

Satz 92: Zwei durch ein Zentrum gehende zueinander senkrecht stehende Achsen bilden ein Strahlenpaar der koniugierten Involution dieses Zentrums.

Satz 92′: Zwei in einer Achse liegende um $\frac{\pi}{2}$ voneinander entfernte Zentren bilden ein Punktpaar der koniugierten Involution dieser Achse.

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 124.

§ 91. Geht eine Senkrechte zu einer Geraden durch den Pol der Geraden, so heisst diese Senkrechte der koniugierte Lot der Geraden.

Jeder Punkt besitzt eine koniugierte Strahleninvolution, in jeder Strahleninvolution gibt es ein Paar zueinander senkrechter Strahlen (Sätze 25′ u. 45), folglich gehen durch jeden Punkt zwei einander koniugierte Lote.

Aus der Definition des koniugierten Lotes einer Geraden folgt direkt

Satz 93: Der koniugierte Lot einer Geraden $l$ ist $V l \dot{\psi} l$.

Aus diesem Satze folgt weiter

Satz 94: Die koniugierten Lote aller Strahlen eines Strahlenbüschels erster Ordnung $l_1 + k\, l_2$ sind genau die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte zweier projektiven Punktreihen $l_1 + k l_2$ und $\dot{\psi} l_1 + k \dot{\psi} l_2$, sie bilden alsc einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung; die von diesem Strahlenbüschel umhüllte Kurve nennt man die dem Punkte $V l_1 l_2$ zugeordnete Steiner'sche Parabel; ihre Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} l l_1 & l l_2 \\ l \dot{\psi} l_1 & l \dot{\psi} l_2 \end{vmatrix} = 0. \ ^{1})$$

Der Gleichung der Steiner'schen Parabel genügt der Vektor jeder Achse (Satz 61), wir haben also

Satz 95: Die Achsen sind Tangenten jeder Steiner'schen Parabel. ²)

§ 92. Wenn das Zentrum des Strahlenbüschels $l_1 + k l_2$ in einer der Achsen, etwa $r_i$, liegt, so können wir diesen Strahlenbüschel in der Form $r_i + k\, l'_2$ darstellen; die Gleichung der ihm zugeordneten Steiner'schen Parabel ist (Sätze 94 u. 61)

¹) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 155.
²) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 156.

$$I\, r_i . I(\psi\, l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2) = o,$$

sie zerfällt also in das Punktpaar

$$r_i \text{ und } \psi l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2;$$

weil nun

$$r_i\,(\psi l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2) = \overset{a}{S_i}\, r_i\, l'_2 - \overset{a}{S_i}\, r_i\, l'_2 = o$$

ist, so sind die beiden letzten Punkte um $\overset{\pi}{2}$ voneinander entfernt.

Satz 96: Die einem Punkte $V r_i\, l'_2$ der Achse $r_i$ zugeordnete Steiner'sche Parabel zerfällt in das Punktpaar

$$r_i \text{ und } \psi l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2,$$

dessen Punkte um $\overset{\pi}{2}$ voneinander entfernt sind. [1])

Im Falle eines Kreises liegt jeder Punkt der Kugelfläche in einer Achse (weil jede durch das getrennt liegende Zentrum gehende Gerade eine Achse ist), folglich zerfällt die jedem Punkte der Kugelfläche zugeordnete Steiner'sche Parabel in ein Punktpaar, das aus einem Zentrum $r_i$, das in der Geraden der Zentren liegt, und dem Punkte $\psi l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2$ besteht; weil aber für jedes Zentrum r, das in der Geraden der Zentren liegt, die Gleichung

$$r\,(\psi\, l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2) = \overset{a}{S_i}\, r\, l'_2 - \overset{a}{S_i}\, r\, l'_2 = o$$

gilt, so fällt der Punkt $\psi\, l'_2 - \overset{a}{S_i}\, l'_2$ mit dem getrennt liegenden Zentrum zusammen.

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 155.

Satz 97: Im Falle eines Kreises zerfällt die jedem Punkte der Kugelfläche zugeordnete Steiner'sche Parabel in ein Punktpaar, das aus dem getrennt liegenden Zentrum und einem Punkte der Geraden der Zentren besteht. [1])

§ 93. Der dem Punkte $V l_1 l_2$ zugeordnete Steiner'sche Strahlenbüschel zweiter Ordnung schneidet in jeder Achse eine Punktreihe aus, welche der Punktreihe $l_1 + k l_2$ projektiv ist (Sätze 94, 95 u. 50). Weil aber die Punktreihe $l_1 + k l_2$ dem Strahlenbüschel $l_1 + k l_2$ projektiv ist und der Strahlenbüschel $l_1 + k l_2$ in jeder Achse eine zu ihm perspektive Punktreihe ausschneidet (wenn natürlich die betreffende Achse dem Strahlenbüschel $l_1 + k l_2$ nicht angehört), so sind die beiden Punktreihen, welche der Strahlenbüschel $l_1 + k l_2$ und der ihm zugeordnete Steiner'sche Strahlenbüschel zweiter Ordnung in einer Achse $r_u$ ausschneidet, einander projektiv. Diese Punktreihen sind

$$V r \,(l_1 + k l_2) \text{ und } V r_u v \,(l_1 + k l_2) \,\psi\, (l_1 + k l_2).$$

Wählen wir nun zwei Zahlen m und n so, dass

(2). $$V r_u (m v l_1 \psi l_1 + n v l_2 \psi l_2) = V r_u v (l_1 + l_2) \psi (l_1 + l_2)$$

sei, so können wir dann unsere beide projektive Punktreihen in der Form

$$V r_u \,(l_1 + k l_2) \text{ und } V r_u \,(m v l_1 \psi l_1 + k n v l_2 \psi l_2)$$

darstellen (Satz 14). Wenn wir aus der Gleichung (2) m und n berechnen und dann aufeinander dividieren, so bekommen wir

$$\frac{n}{m} = \frac{r_u l_1}{r_u l_2},$$

[1]) Die Gleichung der dem getrennt liegenden Zentrum zugeordneten Steiner'schen Parabel ist identisch erfüllt.

also können unsere projektive Punktreihen in der Form

$$Vr_u(l_1 + kl_2) \text{ und } Vr_u(r_u l_2 . v l_1 \dot{\psi} l_1 + k r_u l_1 . v l_2 \dot{\psi} l_2)$$

dargestellt werden. Löst man nun $\alpha_{11}$ und $\alpha_{22}$ aus den Gleichungen

$$Vr_u(\alpha_{11} l_1 + \alpha_{12} l_2) = r_u l_2 . Vr_u v l_1 \dot{\psi} l_1 \text{ und } Vr_u(\alpha_{21} l_1 + \alpha_{22} l_2) = \\ = r_u l_1 . Vr_u v l_2 \dot{\psi} l_2$$

auf, so überzeugt man sich, dass $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ ist, folglich sind unsere Punktreihen involutorisch (Satz 37).

Nehmen wir im Strahlenbüschel $l_1 + kl_2$ den Strahl, der durch ein Zentrum $r_v$ geht, d. h. den Strahl $Vr_v v l_1 l_2$; der koniugierte Lot dieses Strahles ist $r_v$; in unseren involutorischen Punktreihen entspricht also dem Punkte $r_v$ der Punkt $r_w$ (es sind $r_u$, $r_v$ und $r_w$ drei ein Oktant bildende Zentren). Nehmen wir nun statt des Strahlenbüschels $l_1 + kl_2$ einen anderen $l'_1 + kl'_2$, so bekommen wir wieder in der Achse $r_u$ zwei involutorische Punktreihen, in welchen auch dem Punkte $r_v$ der Punkt $r_w$ entspricht. Dem Strahle $Vvl_1 l_2 vl'_1 l'_2$ entspricht in beiden Steiner'schen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung ein und derselbe Strahl, folglich fällt in beiden Paaren involutorischer Punktreihen noch ein Paar entsprechender Elemente zusammen, also fallen beide Involutionen identisch zusammen (Satz 39).

Wie also auch der Strahlenbüschel $l_1 + kl_2$ sein möge bekommen wir in jeder Achse eine und nur eine bestimmte Involution, welche wir fokale Involution nennen.

Satz 98: In jeder Achse $r_u$ gibt es eine und nur eine folale Involution

$$Vr_u(l_1 + kl_2) \text{ und } Vr_u(r_u l_2 . v l_1 \dot{\psi} l_1 + k r_u l_1 . v l_2 \dot{\psi} l_2),$$

wo $l_1$ und $l_2$ zwei beliebige voneinander verschiedene Geraden sind, die sich nicht in einem Punkte von $r_u$ schneiden. [1])

Satz 99: Die Zentren $r_v$ und $r_w$ bilden ein Paar entsprechender Punkte der fokalen Involution der Achse $r_u$.

§ 94. Wir nennen die Doppelpunkte einer fokalen Involution die Brennpunkte. Es gibt also in jeder Achse ein Paar der Brennpunkte. Wir wollen jetzt alle Brennpunkte untersuchen.

Seien $r_u$, $r_v$, $r_w$ die Einheitsvektoren dreier ein Oktant bildenden Zentren in der Reihenfolge genommen, dass

$$Vr_u r_v = r_w, \quad Vr_v r_w = r_u, \quad Vr_w r_u = r_v$$

ist. Nehmen wir eine Achse, etwa $r_u$. Die Punkte

$$r_v \text{ und } r_w, \quad r_0 \equiv Vr_u l_1 \text{ und } r'_0 \equiv Vr_u V l_1 \psi l_1$$

bilden zwei Paare entsprechender Punkte der fokalen Involution dieser Achse.

Es ist

$$(r_v r_w r_0 r'_0) = \left(\frac{r_v l_1}{r_w l_1}\right)^2 \cdot \frac{S_w}{S_v} \cdot \frac{S_u - S_v}{S_w - S_u} \cdot$$

Sind $S_u$, $S_v$ und $S_w$ voneinander verschieden und besitzt $S_u$ mit $S_v$ und $S_w$ entgegengesetztes Zeichen, so ist die Involution elliptisch (Satz 43); besitzt $S_u$ dagegen etwa mit $S_v$ gleiches, mit $S_w$ aber entgegengesetztes Zeichen, so ist die Involution hyperbolisch wenn $|S_u > S_v|$ und elliptisch wenn $S_u < |S_v|$ ist.

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 156.

Ist $S_u = S_v$, d. h. haben wir einen Kreis, so ist die Involution parabolisch. Der Punkt $r'_0$ fällt jetzt mit dem Punkte $r_w$ zusammen, weil

$$r_v r'_0 = a\, r_u l_1 . r_v l_1 . \left(\frac{1}{S_u} - \frac{1}{S_v}\right) = 0$$

ist. Es entspricht also sowohl dem Punkte $r_v$ wie auch dem Punkte $r_0$ der Punkt $r_w$, folglich fallen beide Doppelpunkte unserer parabolischen Involution mit dem Punkte $r_w$, d. h. mit dem getrennt liegenden Zentrum des Kreises, zusammen (Satz 42).

Ist $S_u = S_w$, so kommen wir zu demselben Resultate wie im vorigen Falle.

Ist dagegen $S_v = S_w$, so ist die Involution elliptisch.

Satz 100: Im Falle, wenn das Erzeugnis zweier projektiven (n. persp. u. n. konl. resp. konz.) Grundgebilde erster Stufe drei voneinander verschiedene Zentren besitzt, sind von den sechs Brennpunkten nur zwei reel, nämlich die in der der beiden hyperbolischen Achsen liegenden, für welche S grösser in absolutem Werte ist; im Falle eines Kreises sind die Brennpunkte, welche in der Geraden der Zentren liegen, imaginär, dagegen alle anderen sind reell und fallen mit dem getrennt liegenden Zentrum des Kreises zusammen.[1])

[1]) Vgl. R. Böger, Eb. Geom. d. Lage, Leipzig (1900), S. 157.

## INHALTSVERZEICHNIS.


| | | Seite |
|---|---|---|
| I. | Einleitung | 5 |
| II. | Das Doppelverhältnis | 9 |
| III. | Perspektive und projektive Grundgebilde erster Stufe | 17 |
| IV. | Projektive konlokale Punktreihen und konzentrische Strahlenbüschel erster Ordnung | 41 |
| V. | Die Erzeugnisse projektiver Grundgebilde erster Stufe | 57 |
| VI. | Projektive Grundgebilde zweiter Stufe | 83 |
| VII. | Koniugierte und fokale Involutionen | 93 |

# Lebenslauf.

Ich, Franz Xaver Włodarski, wurde am 2. Dezember 1889 zu Gorzków (Russ. Polen) geboren. Von 1899 bis 1900 besuchte ich das Staatsprogymnasium zu Zamość, von 1900 bis 1905 das Staatsgymnasium zu Lublin und von 1906 das Staszyc-Gymnasium zu Lublin, wo ich im Juni 1907 die Maturitätsprüfung bestand. Im Herbst 1907 wurde ich an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg (Schweiz) immatrikuliert, wo ich im Sommersemester 1910 das Licentiatsdiplom d. math. Wiss. erwarb.

Während meiner Studienzeit habe ich die Vorlesungen folgender Professoren gehört: Bistrzycki, Brunhes, Daniëls, v. Estreicher, Glücksmann, Gockel, v. Kowalski.